תירגול 9

שונות משותפת

• יהיו X, Y מ"מ המוגדרים על אותו מרחב הסתברות

$$COV(X,Y)=E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

• $$COV(X,Y)=E[X\cdot Y]-E[X]\cdot E[Y]$$

• X, Y בעלי שונות אז

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2COV(X,Y)$$

באופן כללי

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} V[X_i]+2\sum_{1\le i<j\le n} COV(X_i,X_j)$$

תכונות

$$COV(X,X)=V[X]$$
$$COV(X,Y)=COV(Y,X)$$
$$COV(aX_1+bX_2,Y)=a\,COV(X_1,Y)+b\,COV(X_2,Y)$$
$$COV(X,aY_1+bY_2)=a\,COV(X,Y_1)+b\,COV(X,Y_2)$$

<u>שאלה</u>

① מטילים קוביה הוגנת n פעמים. יהי X מספר ההטלות שבהן מתקבל 1, ויהי Y מספר ההטלות שבהן מתקבל 2. חשב את $COV(X,Y)$.

<u>פתרון</u> נגדיר

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{מתקבל "1" בהטלה ה-}i\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}\qquad 1\le i\le n$$

$$Y_j=\begin{cases}1, & \text{מתקבל "2" בהטלה ה-}j\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}\qquad 1\le j\le n$$

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i,\qquad Y=\sum_{j=1}^{n} Y_j$$

$$COV(X,Y)=COV\left(\sum_{i=1}^{n} X_i,\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)=\sum_{1\le i,j\le n} COV(X_i,Y_j)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} COV(X_i,Y_i)+\sum_{i\ne j} COV(X_i,Y_j)$$

$i \neq j$

$$COV(X_i, Y_j) = E[X_i \cdot Y_j] - E[X_i] \cdot E[Y_j] =$$
$$= P(X_i Y_j = 1) - P(X_i = 1) \cdot P(Y_j = 1) =$$
$$= \frac{1}{36} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$i = j$

$$COV(X_i, Y_i) = E[X_i \cdot Y_i] - E[X_i] \cdot E[Y_i] =$$
$$= 0 - \frac{1}{36}$$

$$COV(X, Y) = -\frac{n}{36}$$

(2.) ב-n ניסויים בלתי תלויים, שבכל אחד מהם ההסתברות להצלחה היא p וההסתברות לכשלון היא q, מצא את שונות מספר ה-i-ים שעבורם גם בפעם ה-i-ית וגם בפעם ה-$(i+1)$-ית היתה הצלחה.

<u>פתרון:</u> נגדיר

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{הצלחה במקום ה-}i\text{ וגם במקום ה-}i+1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 1 \le i \le n-1$$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$$

$$V[X] = V\left[\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n-1} V[X_i] + \sum_{i \neq j} COV(X_i, X_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} V[X_i] + \sum_{|i-j|=1} COV(X_i, X_j) + \sum_{|i-j|>1} COV(X_i, X_j)$$

$$V[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = p^2 - p^4$$

$|i-j| = 1$:

$$COV(X_i, X_j) = E[X_i \cdot X_j] - E[X_i] \cdot E[X_j] =$$
$$= p^3 - p^4$$

$$COV(X_i, X_j) = E[X_i \cdot X_j] - E[X_i]\cdot E[X_j] = \quad |i-j|>1$$
$$= p^4 - p^2 \cdot p^2 = 0$$

$$V[X] = (n-1)\cdot(p^2-p^4) + 2\cdot(n-2)(p^3-p^4)$$ / סך

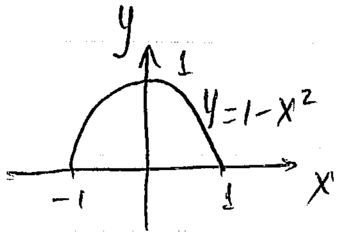
3. מ"מ X מתפלג אחיד בקטע $[1,2]$.
מצא את $COV(X, \frac{1}{X})$

פתרון: $X \sim U(1,2)$

$$COV(X,\tfrac{1}{X}) = E[X \cdot \tfrac{1}{X}] - E[X]\cdot E[\tfrac{1}{X}] =$$
$$= 1 - \frac{1+2}{2}\cdot \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = 1 + \frac{3}{2}\cdot \ln 2$$
$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \Leftarrow X \sim U(1,2)$$

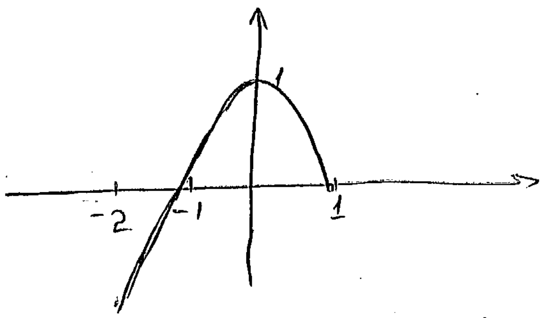
4. מ"מ X הוא משתנה אקרי רציף. נגדיר $Y = 1-X^2$
מצא את $COV(X,Y)$ כאשר
(א) $X \sim U(-1,1)$
(ב) $X \sim U(-2,1)$
(ג) $X \sim U(-1,2)$

פתרון: (א)



$$COV(X,Y) = E[X(1-X^2)] - E[X]\cdot E[1-X^2]$$
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}, \quad E[X] = 0 \quad \Leftarrow X \sim U(-1,1)$$
$$E[X^3] = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{2}\,dx = 0$$
$$COV(X,Y) = E[X] - E[X^3] - E[X]\cdot E[1-X^2] = 0$$

(a)



$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[X] - E[X^3] - E[X]\cdot(1 - E[X^2])$$

$$E[X] = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -2 < x \le 1 \\ 0, & \text{инак} \end{cases} \Leftarrow X \sim U(-2,1)$$

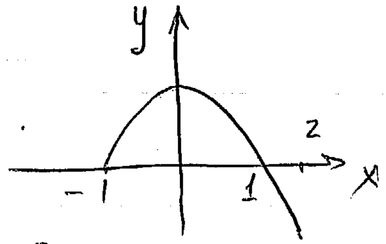
$$E[X^3] = \int_{-2}^{1} \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{x^4}{12}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{12}\cdot(1-16) = -\frac{15}{12}$$

$$E[X^2] = \int_{-2}^{1} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{9}\cdot(1+8) = 1.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -\frac{1}{2} + \frac{15}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{3}{4} > 0.$$

(d)

$$E[X] = \frac{-1+2}{2}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{инак} \end{cases} \Leftarrow X \sim U(-1,2)$$



$$E[X^3] = \int_{-1}^{2} \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{x^4}{12}\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{12}\cdot(16-1) = \frac{15}{12}$$

$$E[X^2] = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8+1}{9} = 1.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{2} - \frac{15}{12} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} < 0$$

(5) $X_1, X_2, \dots, X_n$ n משתנים מקריים בעלי שונות σ^2.
ידוע כי $COV(X_i, X_j)=0$ $\forall i\neq j$. חשב את

$$\lim_{n\to\infty} V\left[\frac{X_1+2X_2+\dots+nX_n}{n^{3/2}}\right]$$

פתרון:

$$V\left[\frac{X_1+2X_2+\dots+nX_n}{n^{3/2}}\right]=\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)^2\cdot V[X_1+2X_2+\dots+nX_n]=$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2V[X_1]+2^2\cdot V[X_2]+\dots+n^2\cdot V[X_n]\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{n^3}\cdot\left(1^2+2^2+\dots+n^2\right)=\frac{\sigma^2}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\sigma^2}{3}$$

(6) בין תשעה השחקנים בקבוצת כדורסל יש 2 שחקני צ'ר,
3 שחקנים קדמיים ו-4 קלעי חוץ. מחלקים את השחקנים
באקראי לשלוש קבוצות בנות 3 שחקנים כל אחת.
מצא את -

(א) התוחלת של מספר השלשות שבהן יש שחקן אחד מכל
סוג

(ב) השונות של מספר זה.

פתרון: נגדיר

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{בשלשה ה-}i\text{ יש שחקן אחד מכל סוג}\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}\qquad 1\le i\le 3$$

$$X=\sum_{i=1}^{3}X_i$$

(א)

$$E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{3}X_i\right]=\sum_{i=1}^{3}E[X_i]$$

$$1\le i\le 3\qquad E[X_i]=P(X_i=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{2}{7}$$

לכן

$$E[X]=\frac{6}{7}$$

$$V[X] = \sum_{i=1}^{3} V[X_i] + 2 \sum_{1\le i<j\le 3} cov(X_i, X_j) \qquad (ב)$$

$$V[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{2}{7} - \left(\frac{2}{7}\right)^2$$
$1 \le i \le 3$

$$cov(X_i, X_j) = E[X_i \cdot X_j] - E[X_i]E[X_j] =$$
$$= P(X_i \cdot X_j = 1) - P(X_i = 1)\cdot P(X_j = 1) =$$
$$= \frac{2\cdot 3\cdot 4}{\binom{9}{3}} \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3}{\binom{6}{3}} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{1}{245}$$

$$V[X] = \frac{30}{49} + 2\cdot\binom{3}{2}\cdot\frac{1}{245} = \frac{156}{245}$$

7. טורפים חפיסה בת 52 קלפים ובוחרים מתוכה 13 קלפים באקראי. נסמן ב-X וב-Y את מספר האסים ואת מספר העלים, בהתאמה, בקלפים שנבחרו.
חשב את $cov(X,Y)$.

<u>פתרון:</u> נגדיר

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{הקלף ה-}i\text{ הוא אס} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 1 \le i \le 13$$

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{הקלף ה-}j\text{ הוא עלה} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad 1 \le j \le 13$$

$$cov(X,Y) = cov\left(\sum_{i=1}^{13} X_i, \sum_{j=1}^{13} Y_j\right) = \sum_{1\le i,j\le 13} cov(X_i, Y_j)$$

מקרה ראשון $i=j$

$$cov(X_i, Y_i) = E[X_i Y_i] - E[X_i]\cdot E[Y_i]$$

$$E[X_i] = P(X_i = 1) = \frac{4}{52} \qquad E[Y_i] = P(Y_i = 1) = \frac{13}{52}$$

$$X_i Y_i = \begin{cases} 1 & \text{הקלף ה-}i\text{ הוא אס עלה} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E[X_i \cdot Y_i] = 1 \cdot P(X_i \cdot Y_i = 1) + 0 \cdot P(X_i \cdot Y_i = 0) =$$

$$= \frac{1}{52}$$

$$COV(X_i, Y_i) = \frac{1}{52} - \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = 0$$

<u>מקרה 2</u>

$i > j$

$$COV(X_i, Y_j) = E[X_i \cdot Y_j] - E[X_i] \cdot E[Y_j]$$

$E[X_i \cdot Y_j] = P(X_i \cdot Y_j = 1) =$ (הסתברות שלמה) $P($הקלף הראשון הוא אס עלה$)$ ·

$\cdot P($הקלף השני הוא אס | הקלף הראשון הוא אס עלה$) + P($הקלף הראשון הוא עלה לא אס$) \cdot P($הקלף השני הוא אס | הקלף הראשון הוא עלה ולא אס$) =$

$$= \frac{1}{52} \cdot \frac{3}{51} + \frac{12}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{1}{52}$$

לכן

$$COV(X_i, Y_j) = 0$$

<u>מקרה 3</u>

$i < j$

$E[X_i Y_j] = P($הקלף הראשון הוא אס עלה$) \cdot P($הקלף השני הוא עלה | הקלף הראשון הוא אס עלה$) +$

$+ P($הקלף הראשון הוא אס לא עלה$) \cdot P($הקלף השני הוא עלה | הקלף הראשון הוא אס לא עלה$) =$

$$= \frac{1}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{3}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{12+39}{52 \cdot 51} = \frac{1}{52}$$

לכן

$$COV(X_i, Y_j) = 0$$

תשובה סופית

$$COV(X, Y) = 0$$