תרגול 3. הסתברות (2013).

<u>תרגול 4---3</u>

1. מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ בוחרים k תתי-קבוצות, לפי התהליך הבא: עבור כל איבר מטילים מטבע; אם "עץ" אז האיבר שייך לתת-קבוצה, אחרת-- לא. חוזרים על התהליך k פעמים לגבי כל איבר. מצא את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

א. כל תתי-קבוצות אלה זרות.

ב. כל תתי-הקבוצות זרות בזוגות.

2. 5 קלפים מתקבלות מחפיסה של 52 קלפים. מהי ההסתברות שיש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבה הצורות?

3. הוכח את אי-השוויון Boole

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

למת הרציפות:

א. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ הינה סדרה יורדת של מאורעות ז"א $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ אזי

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i).$$

ב. . אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ הינה סדרה עולה של מאורעות ז"א $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ אזי

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i).$$

4. מהי ההסתברות שהספרה 5 לא מופיעה בשבר עשרוני אין-סופי $0.a_1a_2a_3\ldots \in [0,1]$?

5. נתונים $P(A) = 0.4, P(B) = 0.25, P(A\bigcap B) = 0.15$ מצא $P(\bar{A} \mid B),\ P(B \mid A),\ P(\bar{A}\bigcap \bar{B})$.

6. מתוך קבוצה $\{1,2\ldots n\}$ בוחרים שתי תתי-קבוצות B,A לפי התהליך משאלה 1. מצא $P\left(|A| = k \cap |B| = m \mid A \cap B = \varnothing\right)$.

7. מתוך קבוצה $\{1,2\ldots n\}$ בוחרים באופן מקרי וללא החזרה מספרים x,y,z. מצא $P\left(x < z < y \mid x < y\right)$.

8. ישנן 5 תיבות כאשר 2 מסוג א, 2 מסוג ב ו 1 מסוג ג . בכל אחד מהתיבות ישנם 5 כדורים, כאשר החלוקה בין כדורים לבנים ושחורים, בכל סוג תיבה, נתון בטבלה :

סוג	כדורים לבנים	כדורים שחורים
א	2	3
ב	1	4
ג	4	1

- **באפן אקראי נבחרת תיבה אחת, וממנה מוציאים כדור אחד. מהי ההסתברות לכך שהכדור יהיה לבן?**
- **ידוע שהכדור שנבחר הינו לבן, מהי ההסתברות שהוא הוצא מתיבה מסוג א? ב? ג?**

9. בתיבה ישנם 3 כדורים לבנים ו- 2 שחורים.

א. מוציאים מתוכה מספר כדורים ללא החזרה. מהי ההסתברות p_k שהכדור השחור יופיע בפעם הראשונה, בהוצאה ה-k-ית (k=1,2,3,4) .

ב. מוציאים רק שני כדורים ללא החזרה. ידוע שאחד מהם לבן. מהי ההסתברות שגם השני לבן?

10. מטילים מטבע עד שהוא נופל בפעם הראשונה על עץ . לאחר מכן מטילים אותו שוב אותו מספר פעמים כמו קודם. מה ההסתברות לקבל בשלב השני k פעמים עץ, כאשר $k \geq 0$?

11. (לקוח מ-: ע. ארליך, מתמטיקה למדעים – הסתברות, אונ' ת"א). קרב היריות בין הטוב, הרע והמכוער נערך לפי הכללים הבאים: כל אחד יורה כדור אחד בתורו. הסתברות הפגיעה עבור הרע היא 1, עבור המכוער היא 0.8 ועבור הטוב – 0.5 . אולם לכל אחד ישנה הזכות להחליט שהוא יורה באוויר. מקיימים הגרלה לגבי סדר היורים. <u>אסטרטגית הירי:</u> אם תור הרע לירות, ואם גם הטוב וגם המכוער חיים, יירה הרע במכוער (כי הוא יותר מסוכן). אם תור המכוער לירות, וגם הטוב וגם הרע חיים, יירה המכוער ברע, מאותה סיבה. אם תור הטוב לירות, ושני האחרים חיים, הוא יירה באוויר, כדי שהמכוער והרע יהיו עסוקים זה בזה, וכשאחד מהם ייהרג, יגיע תור הטוב ותובטח לו הסתברות של לפחות 0.5 להישאר חי. מהי ההסתברות של כל אחד מהם להישאר בחיים?

12. שחקן דוגם מספר שלם אקראי בין 1 ל-2 בהסתברות שווה. אם המספר הנבחר הינו 1, אזי המשחק נגמר. אחרת, הוא דוגם מספר אקראי נוסף, בין 1 ל-3 בהסתברות שווה. באפן כללי, עבור $n \geq 2$, אם המספר הנבחר בשלב ה- $(n-1)$-י הינו 1, אזי המשחק נגמר. אחרת עוברים לשלב ה-n-י ובוחרים מספר אקראי מ בין 1 ל-$(n+1)$ בהסתברות שווה. נסמן ב- X את אורך המשחק, ז"א מספר הסבבים במשחק. (לדוגמא, נניח שבסיבוב הראשון התקבל המספר 2, בסיבוב השני התקבל 2, בסיבוב השלישי התקבל 4, בסיבוב הרביעי התקבל 3, ובסיבוב החמישי התקבל 1. אזי המשחק מסתיים עם $X=5$.)

חשב $P(X=2 \mid X \text{ זוגי})$ **.**

13) במחלקה למדעי האקראיות באוניברסיטת בן-גוריון רשומים $2n$ סטודנטים, מהם n בנים ו-n בנות. מזכירת המחלקה אמורה לשלוח לכל סטודנט מכתב המפרט את מצבו האקדמי. מזכירת המחלקה מתייחסת למכתבים אלה באותה צורה כמו בבעיית המזכירה הרשלנית שנידונה בכתה. נסמן ב-A את המאורע שכל אחד מהבנים מקבל מכתב המיועד לאיזשהו בן וכל אחת מהבנות מקבלת מכתב המיועד לאיזושהי בת. נסמן ב-B את המאורע שאף אחד מהבנים לא מקבל את המכתב המיועד לו וב-C את המאורע שאף אחת מהבנות לא מקבלת את המכתב המיועד לה.

a) $P(A)=\frac{1}{n!},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ **.**

b) $P(A)=\frac{1}{\binom{2n}{n}},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e},\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e^2}$ **.**

c) $P(A)=\frac{1}{\binom{2n}{n}},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\frac{1}{e},\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\left(1-\frac{1}{e}\right)^2$ **.**

d) $P(A)=\frac{1}{n!},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e},\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e^2}$

e) אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.