בס"ד

**מקצוע : הסתברות למדעי המחשב**
**מס' קורס : 20112391**
**המרצה: דניאל ברנד**
**בוחן אמצע: כ"ב כסלו תשע"ג**
6/12/2012
**משך הבוחן: שעתיים**
**חמר עזר: ללא הגבלה**

**הנחיות:** ענה על סעיפי המבחן. כל הסעיפים שווי משקל, ויבחרו 10 הסעיפים הטובים ביותר. בכל סעיף 5 טענות, מהן בדיוק אחת נכונה. בכל סעיף בפני עצמו עליך לבחור באחת משתי האפשרויות:

1. לענות על הסעיף, ע"י כתיבת מספר הטענה הנכונה במקום המתאים בדף תשובות זה.
2. לוותר על הסעיף.

**הניקוד:** תשובה נכונה עבור כל סעיף מזכה ב-10 נקודות, תשובה שגויה – ב-0 נקודות, ויתור – ב-2.5 נקודות, כל סימון אחר (כגון שתי טענות או טענה וויתור) – ב-0 נקודות.

**התשובות:**

| שאלה 1 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|---|---|---|
| א. | 4 | |
| ב. | 3 | |
| ג. | 2 | |
| ד. | 1 | |
| ה. | 3 | |

| שאלה 2 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|---|---|---|
| א. | 2 | |
| ב. | 3 | |
| ג. | 2 | |
| ד. | 4 | |

| שאלה 3 | מספר הטענה הנכונה | ויתור על הסעיף |
|---|---|---|
| א. | 4 | |
| ב. | 1 | |
| ג. | 1 | |

בהצלחה!

## שאלה 1

**עיריית באר שבע מתכננת לבנות $n$ גורדי שחקים – $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – לאורך שדרות רגר מדרום לקמפוס. גובה $S_1$ הינו 1 ק"מ, גובה $S_2$ הינו 2 ק"מ, ..., גובה $S_n$ הינו $n$ ק"מ. סדר ה-$S_i$-ים הינו אקראי, כך שהסתברות כל אחד מ-$n!$ הסדורים האפשריים שווה. כשמתבוננים מהקמפוס, ניתן לראות בנין אם ורק אם הוא גבוה מכל הקרובים ממנו לקמפוס. (לדוגמא, אם $n = 10$ והסדר הינו $S_6, S_2, S_5, S_8, S_3, S_1, S_7, S_{10}, S_9, S_4$, באשר $S_6$ הינו הקרוב ביותר לקמפוס, אזי ניתן לראות רק את $S_6, S_8, S_{10}$.) עבור $1 \le i \le n$, נסמן ב-$V_i$ את המאורע: $S_i$ נראה מהקמפוס.**

**א. אם $n$ מספיק גדול, אזי $P(V_3) =$**

**א.1.** $\frac{1}{n+1}$.

**א.2.** $\frac{1}{n}$.

**א.3.** $\frac{1}{n-1}$.

**א.4.** $\frac{1}{n-2}$.

**א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ב. אם $n$ מספיק גדול, אזי $P(V_2 \mid V_1) =$**

**ב.1.** $\frac{1}{n+1}$.

**ב.2.** $\frac{1}{n}$.

**ב.3.** $\frac{1}{n-1}$.

**ב.4.** $\frac{1}{n-2}$.

**ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ג. אם $n$ מספיק גדול, אזי $P(V_1 | V_2) =$**

**ג.1.** $\frac{1}{n+1}$.

**ג.2.** $\frac{1}{n}$.

**ג.3.** $\frac{1}{n-1}$.

**ג.4.** $\frac{1}{n-2}$.

**ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ד. אם $n$ מספיק גדול, אז ההסתברות שניתן יהיה לראות בדיוק שני $S_i$-ים מן הקמפוס הינה**

**ד.1.** $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$.

**ד.2.** $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

**ד.3.** $\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$.

**ד.4.** $\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

**ד.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ה. לכל $1 \le i \le n$, האגודה לסדר ומשטר** (אסם) **תשלם לאוניברסיטה $i$ מיליארד שקל אם $S_i$ נמצא במקום ה- $i$. (לפיכך, בדוגמא בראשית השאלה היא תשלם לאוניברסיטה $2+7+9=18$ מיליארד שקל.) ההסתברות ש**אסם **תשלם לאוניברסיטה בדיוק 3 מיליארד שקל הינה $\frac{1}{n}a_{n-1}+\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$, באשר לכל $m>3$**

**ה.1.** $a_m = \frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)$.

**ה.2.** $a_m = \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}\right)$.

**ה.3.** $a_m = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^m}{m!}$.

**ה.4.** $a_m = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{m!}$.

**ה.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

## שאלה 2:

**שולפים מחפיסה בת** 52 **קלפים את כל הקלפים בזה אחר זה ללא החזרה. לכל** $1 \le i \le n$**, נסמן ב-** $D_i$ **את מספר קלפי היהלום מבין** $i$ **הקלפים הראשונים שהוצאו וב-** $H_i$ **את המספר המתאים של קלפי הלב.**

**א.** $P(D_6 = H_6 = 3) =$

**א.1.** $\dfrac{1}{\binom{52}{6}}$.

**א.2.** $\dfrac{\binom{13}{3}^2}{\binom{52}{6}}$.

**א.3.** $\dfrac{13}{52}\cdot\dfrac{12}{51}\cdot\dfrac{11}{50}\cdot\dfrac{10}{49}\cdot\dfrac{9}{48}\cdot\dfrac{8}{47}$.

**א.4.** $\dfrac{13}{52}\cdot\dfrac{12}{51}\cdot\dfrac{11}{50}\cdot\dfrac{10}{49}\cdot\dfrac{9}{48}\cdot\dfrac{8}{47}\cdot 3!^2$.

**א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ב.** $P(\max_{1\le i\le 52}(D_i - H_i) = 13) =$

**ב.1.** $\dfrac{26!}{52!}$.

**ב.2.** $\dfrac{13!}{26!}$.

**ב.3.** $\dfrac{1}{\binom{26}{13}}$.

**ב.4.** $\dfrac{1}{2^{13}}$.

**ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ג.** $P\left(\min_{1\le i\le 52}\left(D_i - H_i\right) = 0\right) =$

**ג.1.** $\frac{1}{13}$.

**ג.2.** $\frac{1}{14}$.

**ג.3.** $\frac{1}{26}$.

**ג.4.** $\frac{1}{27}$.

**ג.5.** **אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ד.** $P\left(\min_{1\le i\le 52}\left(D_i - H_i\right) \ge -1 \text{ , } \max_{1\le i\le 52}\left(D_i - H_i\right) \le 1\right) =$

**ד.1.** $\frac{13!}{26!}$.

**ד.2.** $\frac{13!^2}{26!}$.

**ד.3.** $\frac{2^{13}\cdot 13!}{26!}$.

**ד.4.** $\frac{2^{13}\cdot 13!^2}{26!}$.

**ד.5.** **אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

## שאלה 3

**ראובן ושמעון מתחרים בקליעה למטרה. בכל שלב, כל אחד מהם יורה כדור אחד. התחרות נמשכת עד אשר, בשלב מסוים, אחד מהם פוגע במטרה והאחר לא. השחקן שפגע בשלב זה הוא המנצח בתחרות. נסמן ב-** $p_R$ **את ההסתברות של ראובן לקלוע במטרה בכל שלב וב-** $p_S$ **את זו של שמעון, באשר תוצאת כל שלב בלתי-תלויה באלו של שלבים אחרים. יהי** $X$ **מספר שלבי התחרות. (לדוגמא, אם שניהם קולעים במטרה בשלושת השלבים הראשונים, שניהם מחטיאים בשני השלבים הבאים, ובשלב הבא ראובן מחטיא ושמעון קולע, אזי** $X = 6$ **.)**

**א. ההסתברות שראובן מנצח בתחרות הינה**

**א.1.** $\dfrac{p_R - p_R \cdot p_S}{1 - p_R - p_S + 2p_R \cdot p_S}$.

**א.2.** $\dfrac{p_R}{p_R + p_S}$.

**א.3.** $\dfrac{1 - p_S}{2 - p_R - p_S}$.

**א.4.** $\dfrac{p_R - p_R \cdot p_S}{p_R + p_S - 2p_R \cdot p_S}$.

**א.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ב. אם** $p_R = \dfrac{1}{3}$ **ו-** $p_S = \dfrac{1}{4}$ **, אזי** $F_X(100) =$

**ב.1.** $1 - \left(\dfrac{7}{12}\right)^{100}$.

**ב.2.** $1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}$.

**ב.3.** $1 - \left(\dfrac{5}{12}\right)^{100}$.

**ב.4.** $1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$.

**ב.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

**ג. נניח כעת שהשחקנים מקיימים 200 תחרויות, באשר כמו קודם $p_R = \frac{1}{3}$ ו- $p_S = \frac{1}{4}$. נסמן ב- $Y$ את מספר התחרויות מבין ה-200, שהוכרעו כבר בשלב הראשון. אזי** $P(Y = 150) =$

**ג.1.** $\binom{200}{150}\left(\frac{5}{12}\right)^{150}\left(\frac{7}{12}\right)^{50}$.

**ג.2.** $\binom{200}{150}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}$.

**ג.3.** $\binom{200}{150}\left(\frac{7}{12}\right)^{150}\left(\frac{5}{12}\right)^{50}$.

**ג.4.** $\binom{200}{150}\left(\frac{2}{3}\right)^{150}\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$.

**ג.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.**

בהצלחה!