א'

1. יש זוג של הבעיות הדואליות:

$$\begin{aligned} &\max \quad cx \\ &Ax \le b, \qquad (P) \\ &x \ge 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \quad yb, \\ &yA \ge c, \qquad (D) \\ &y \ge 0. \end{aligned}$$

נניח שהוקטורים x* ו - y* הם הפתרונות של הבעיות (P) ו- (D)
נגדיר את פונקצית לגראנג':

$$L(x,y) = cx + y(b - Ax).$$

הוכח שהוקטורים x* ו - y* הם נקודת אוכף של פונקציה $L(x, y)$. ,
דהיינו $L(x, y^*) \le L(x^*, y^*) \le L(x^*, y)$ לכל $x \ge 0,\ y \ge 0$.

הפתרון:

לפי החוק המשלים:

$$\begin{aligned} y^*(b - Ax^*) &= 0 \\ x^*(c - y^*A) &= 0. \end{aligned}$$

לכן

$$L(x^*, y^*) = cx^* = y^*b.$$

ניקח $y \ge 0$. אז $y(b - Ax^*) \ge 0$. לכן

$$L(x^*, y) = cx^* + y(b - Ax^*) \ge cx^* = L(x^*, y^*) \qquad (1)$$

ניקח $x \ge 0$. אז $(c - y^*A)x \ge 0$. לכן

$$L(x,y^*) = cx + y^*(b - Ax) = y^* b + (c - y^* A)x \ge y^* b = L(x^*, y^*) \qquad (2)$$

(1) ו(2) הם אי שוויונות נדרשים.

2. פתור את הבעיה:

$$\min\ (x_1 + x_2)$$

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \ge 1 \\ &x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ &-x_1 + x_2 \ge 0 \\ &5x_1 + x_2 \ge 6 \\ &x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

הפתרון:

הבעיה הדואלית היא:

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &\max(y_1 + 4y_2 + 0y_3 + 6y_4) \\ &2y_1 + y_2 - y_3 + 5y_4 \le 1 \\ &-y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \le 1 \\ &y_j \ge 0, \quad j \in 1{:}4. \end{aligned}$$

נוסיף משתני חוסר ונחליף max ל min. נקבל את הבעיה:

$$\text{(D')} \qquad \begin{aligned} &\min(-y_1 - 4y_2 - 0y_3 - 6y_4 + 0y_5 + 0y_6) \\ &2y_1 + y_2 - y_3 + 5y_4 + y_5 \qquad = 1 \\ &-y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \qquad + y_6 = 1 \\ &y_j \ge 0, \quad j \in 1{:}6. \end{aligned}$$

הטבלה ההתחלתית:

N_B	c_B	x_B	B^{-1}		λ
5	0	1	1	0	5
6	0	1	0	1	1

		dual	0	0	

הוקטור (yA-c) הוא: (1,4,0,6,0,0). מכניסם לבסיס משתנה y_4. מחשבים את הוקטור λ(בטבלה). מוצאים מהבסיס וקטור 5 בגלל הערך המינימלי של x_i/λ_i.

טבלה 2.

N_B	c_B	x_B	B^{-1}		λ
4	6-	0.2	0.2	0	0.2
6	0	0.8	-0.2	1	2.8
		dual	-1.2	0	

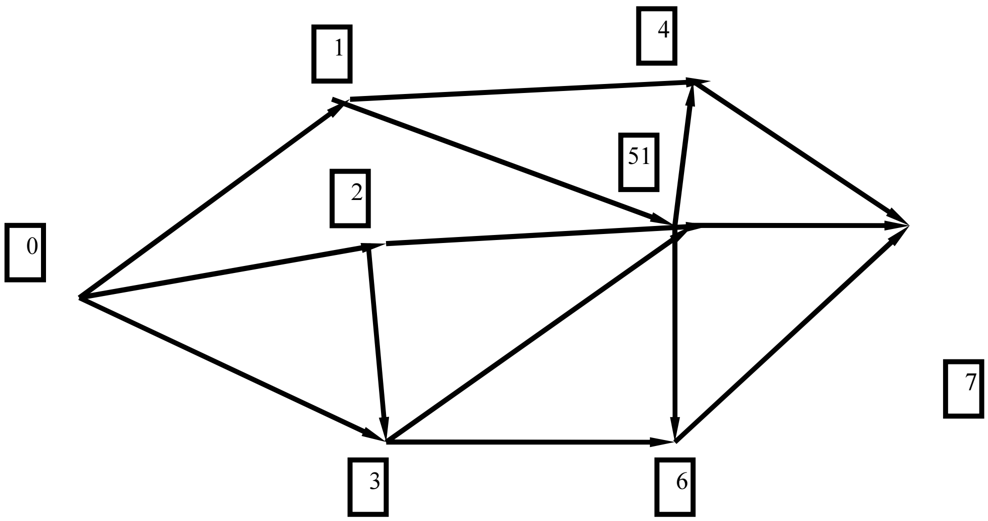
הוקטור (yA-c) הוא: (0 ,1.2- ,0 ,1.2 ,2.8 ,1.4-). מכניסם לבסיס משתנה y_2.
מחשבים את הוקטור λ(בטבלה). מוצאים מהבסיס וקטור 6 בגלל הערך המינימלי של x_i/λ_i.

טבלה 3.

N_B	c_B	x_B	B^{-1}		λ
4	6-	1/7	3/14	1/14-	
2	4-	2/7	1/14-	5/14	
		dual	1-	1-	

הוקטור (yA-c) הוא: (1- ,1- ,0 ,0 ,0 ,0). מפני שאין מספרים חיובים בוקטור (yA-c) קבלנו את הפתרון האופטימלי בבעיה (D') וקטור $x=(-1,-1)$ הוא הפתרון של הבעיה דואלית ל-(D'). אז הוקטור $x^*=-x=(1,1)$ הוא הפתרון של הבעיה דואלית ל-(D) דהיינו של הבעיה המקורית וערך מינימלי בבעיה מקורית שווה ל 2.

3. פתור את בעיית הטרנספורטציה ברשת:



הייצור הוא:
בנקודה 0 8 יחידות,
בנקודה 1 12 יחידות.

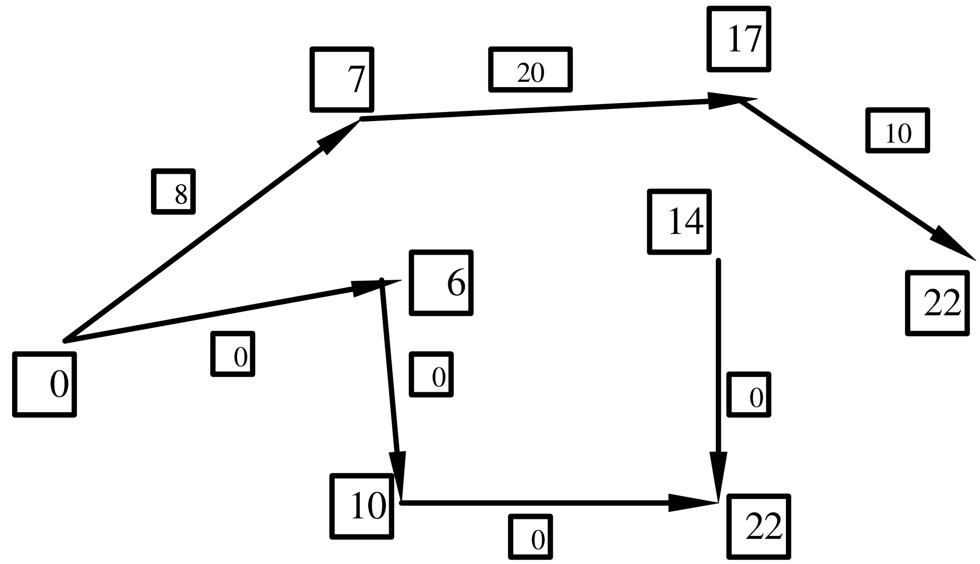
הביקוש הוא:
בנקודה 4 10 יחידות,
בנקודה 7 10 יחידות.

המחירים בצלעות הם:

צלע	0-1	0-2	0-3	1-4	1-5	2-3	2-5	3-5	3-6	4-7	5-4	5-6	5-7	**6-7**
מחיר	7	6	2	10	8	4	6	10	12	5	3	8	4	**5**

הפתרון:

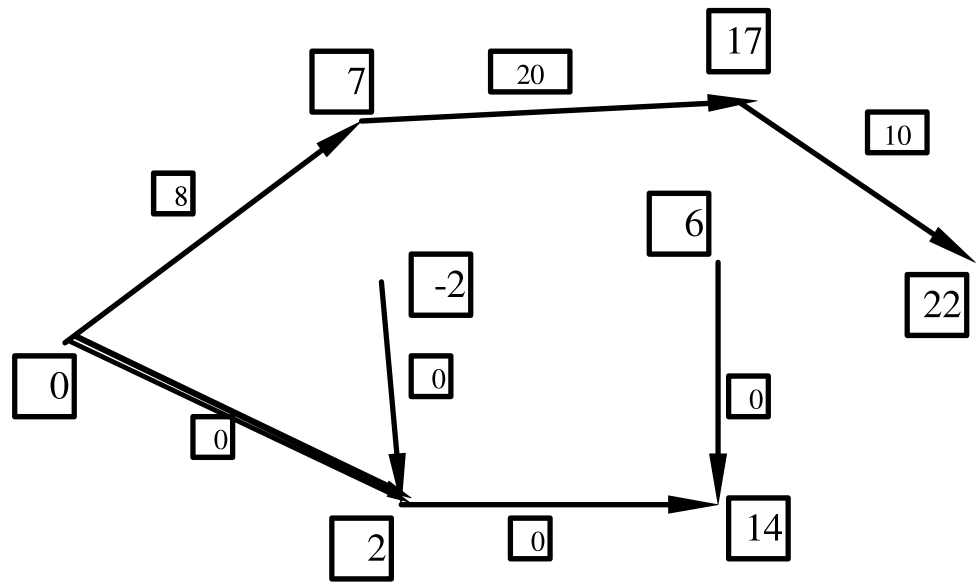
מתחילים מאיזשהו עץ בסיסי. בציור המספרים בצלעות הם כמויות ההובלה, מספרים בקדקודים הם המשתנים הדואליים.



צלע	0-1	0-2	0-3	1-4	1-5	2-3	2-5	3-5	3-6	4-7	5-4	5-6	5-7	**6-7**
מחיר	7	6	2	10	8	4	6	10	12	5	3	8	4	**5**
	0	0	8	0	1-	0	2	6-	0	0	0	0	4	**5-**

בשורה שלישית של הטבלה ההפרשים $v_j - v_i - c_s$.

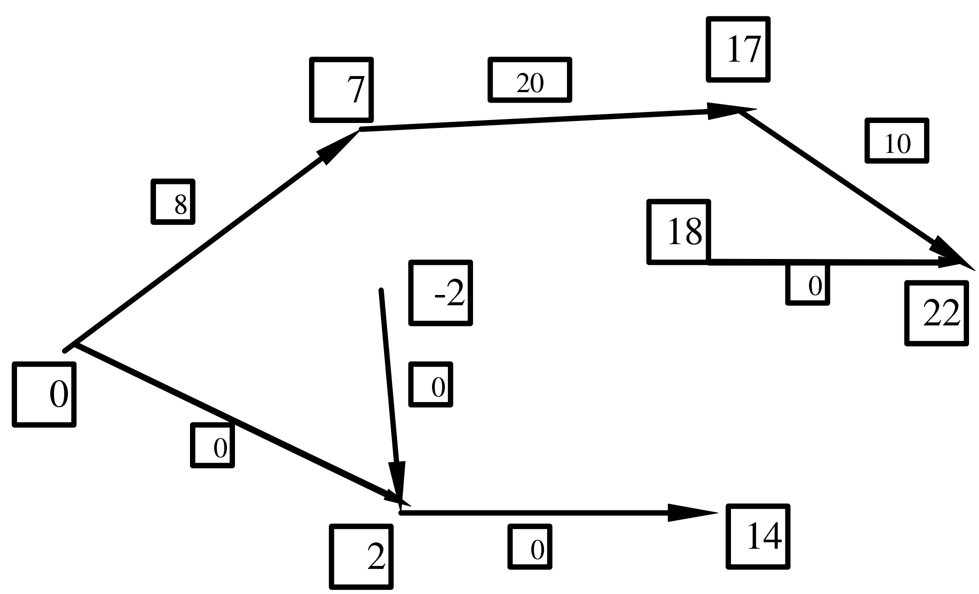
מכניסים לבסיס את הצלע 0-3 . מקבלים את המעגל 0-3-2. מינימום ההובלה בצלעות המעגל שכיוון שלהן שונה מהכיוון של הצלע 0-3 הוא 0 ואפשר להוציא מהבסיס צלע 0-2 או צלע 2-3. נבחר את הצלע 0-2. נקבל העץ הבסיסי הבא:



צלע	0-1	0-2	0-3	1-4	1-5	2-3	2-5	3-5	3-6	4-7	5-4	5-6	5-7	**6-7**
מחיר	7	6	2	10	8	4	6	10	12	5	3	8	4	**5**
	0	8-	0	0	9-	0	2	6-	0	0	8	0	12	**3**

בשורה שלישית של הטבלה ההפרשים $v_j - v_i - c_s$.

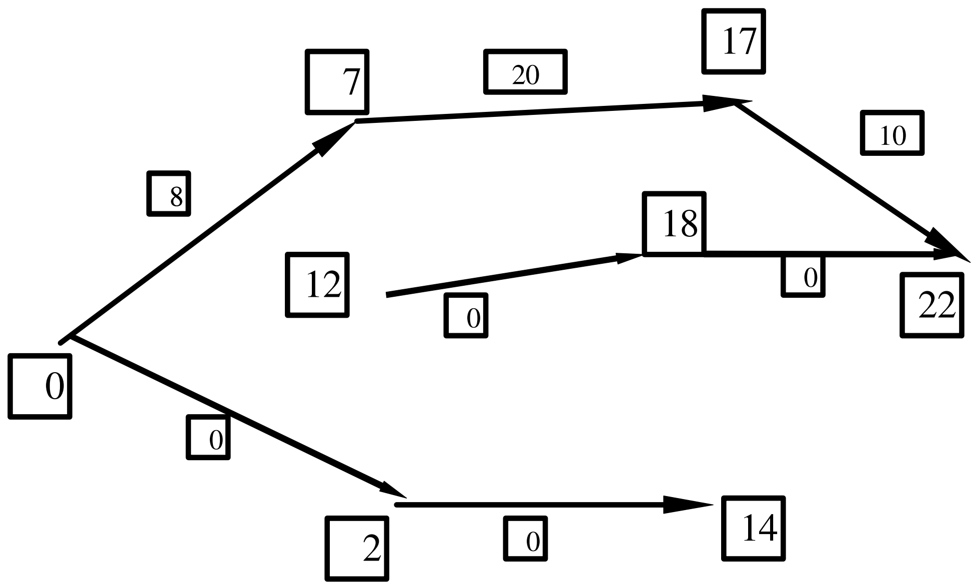
מכניסים לבסיס את הצלע 5-7 . מקבלים את המעגל 5-6-2-0-1-4-7-5. מינימום ההובלה בצלעות המעגל שכיוון שלהן שונה מהכיוון של הצלע 5-7 הוא 0 ויש להוציא מהבסיס צלע 5-6. נקבל העץ הבסיסי הבא:



6-7	5-7	5-6	5-4	4-7	3-6	3-5	2-5	2-3	1-5	1-4	0-3	0-2	0-1	צלע
5	4	8	3	5	12	10	6	4	8	10	2	6	7	מחיר
3	0	12-	4-	0	0	6	14	0	3	0	0	8-	0	

בשורה שלישית של הטבלה ההפרשים $v_j - v_i - c_s$.

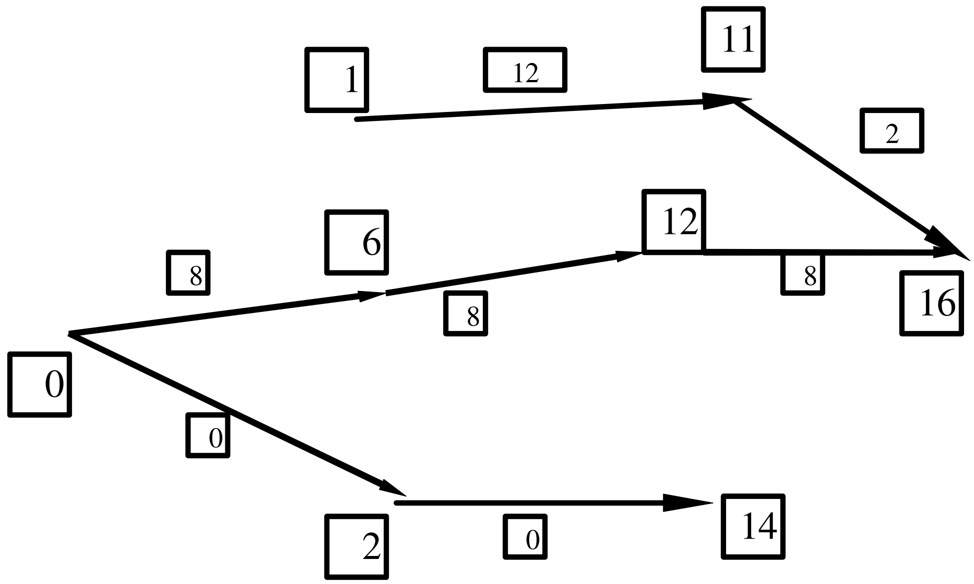
מכניסים לבסיס את הצלע 2-5. מקבלים את המעגל 2-3-0-1-4-7-5-2. מינימום ההובלה בצלעות המעגל שכיוון שלהן שונה מהכיוון של הצלע 2-5 הוא 0 ויש להוציא מהבסיס צלע 2-3. נקבל העץ הבסיסי הבא:



6-7	5-7	5-6	5-4	4-7	3-6	3-5	2-5	2-3	1-5	1-4	0-3	0-2	0-1	צלע
5	4	8	3	5	12	10	6	4	8	10	2	6	7	מחיר
3	0	12-	4-	0	0	6	0	14-	3	0	0	6	0	

בשורה שלישית של הטבלה ההפרשים $v_j - v_i - c_s$.

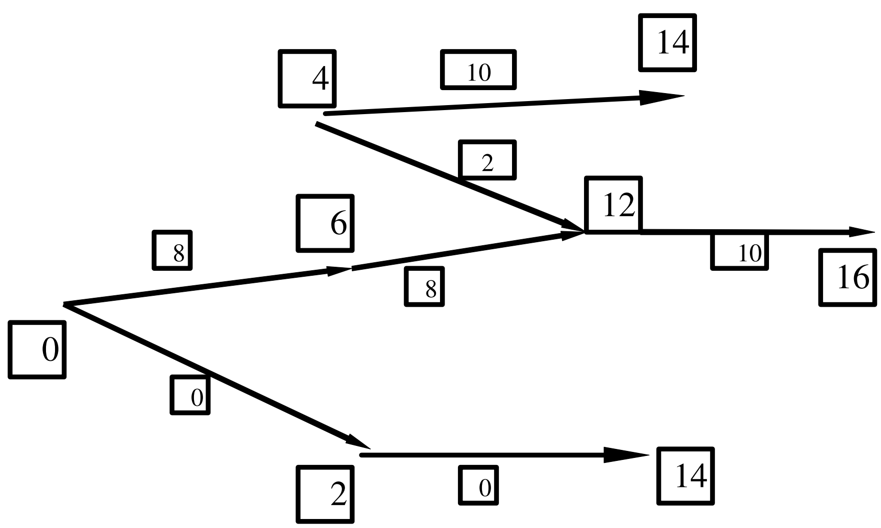
מכניסים לבסיס את הצלע 0-2. מקבלים את המעגל 0-1-4-7-5-2-0. מינימום ההובלה בצלעות המעגל שכיוון שלהן שונה מהכיוון של הצלע 0-2 הוא 8 ויש להוציא מהבסיס צלע 0-1. נקבל העץ הבסיסי הבא:



צלע	0-1	0-2	0-3	1-4	1-5	2-3	2-5	3-5	3-6	4-7	5-4	5-6	5-7	**6-7**
מחיר	7	6	2	10	8	4	6	10	12	5	3	8	4	**5**
	6-	0	0	0	2	8-	0	0	0	0	4-	6-	0	**3-**

בשורה שלישית של הטבלה ההפרשים $v_j - v_i - c_s$.

מכניסים לבסיס את הצלע 1-5. מקבלים את המעגל 1-5-7-4-1. מינימום ההובלה בצלעות המעגל שכיוון שלהן שונה מהכיוון של הצלע 1-5 הוא 2 ויש להוציא מהבסיס צלע 4-7. נקבל העץ הבסיסי הבא:



צלע	0-1	0-2	0-3	1-4	1-5	2-3	2-5	3-5	3-6	4-7	5-4	5-6	5-7	**6-7**
מחיר	7	6	2	10	8	4	6	10	12	5	3	8	4	**5**
	3-	0	0	0	0	8-	0	0	0	3-	1-	6-	0	**3-**

עכשיו אין מספרים חיובים בין $v_j - v_i - c_s$ לכן ההובלה בציור האחרון היא ההובלה האופטימלית.

4. ישנה כמות בלתי מוגבלת של מוטות מתכת כל אחד באורך mm 2000 . יש לחתוך את המוטות למוטות קטנים. הכמויות הנדרשות של המוטות הקטנים הן הבאות:

אורך	**מס' יחידות**
900 mm	2500
700 mm	3000
600 mm	5000
500 mm	700
300 mm	500

מותר להשתמש בשיטות הבאות לצורך חיתוך המוט הגדול :

מס' השיטה	מס' יח' 900 mm	מס' יח' 700 mm	מס' יח' 600 mm	מס' יח' 500 mm	מס' יח' 300 mm
1	**2**	**-**	**-**	**-**	**-**
2	**1**	**-**	**1**	**1**	**-**
3	**-**	**2**	**-**	**-**	**2**
4	**-**	**-**	**3**	**-**	**-**
5	**-**	**1**	**-**	**2**	**1**
6	**-**	**-**	**2**	**1**	**1**
7	**1**	**1**	**-**	**-**	**1**
8	**-**	**-**	**1**	**2**	**1**
9	**-**	**2**	**1**	**-**	**-**

כתוב את הבעיה של תכנון ליניארי המאפשרת לחשב כמה מוטות גדולים יש לחתוך בכל שיטה על מנת לספק את הכמויות הנדרשות בכל סוגי המוטות הקטנים ולצמצם את מספר המוטות הגדולים שבשימוש.

הפתרון:

נסמן x_j המספר של המוטות הגדולים שנחתכים בשיטה j $j \in 1{:}9$.

אז מספר המוטות הגדולים שבשימוש הוא

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$

מספר המוטות ב אורך 900 mm הוא: $2x_1 + x_2 + x_7$,

מספר המוטות ב אורך 700 mm הוא: $2x_3 + x_5 + x_7 + 2x_9$,

מספר המוטות ב אורך 600 mm הוא: $x_2 + 3x_4 + 2x_6 + x_8 + x_9$,

מספר המוטות ב אורך 500 mm הוא: $x_2 + 2x_5 + x_6 + 2x_8$,

מספר המוטות ב אורך 300 mm הוא: $2x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$.

הבעיה של תכנון ליניארי היא הבאה:

$$\min(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9)$$

$$2x_1 + x_2 + x_7 \geq 2500$$

$$2x_3 + x_5 + x_7 + 2x_9 \geq 3000$$

$$x_2 + 3x_4 + 2x_6 + x_8 + x_9 \geq 5000$$

$$x_2 + 2x_5 + x_6 + 2x_8 \geq 700$$

$$2x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 500$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1{:}9.$$