1. נתונה פונקציה קמורה $f(u)$ מוגדרת עבור כל $u \in E^m$. A היא מטריצה $(m \times n)$.
נגדיר את הפונקציה $g(v) = f(Av)$ שמוגדרת עבור כל $v \in E^n$.
נא להוכיח שפונקציה $g(v)$ היא פונקציה קמורה ב- E^n .

2. נא למצוא בעזרת משפט קון-טקר את פתרון הבעיה:

$$\min \quad x$$
$$x^2 + y^2 \le 1$$
$$x^2 \le y$$
$$x + y \le 0.$$

האם כל התנאים של המשפט מתקיימים?

הפתרון. בבעיה:
$f(x,y) = x, \quad g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad g_2(x,y) = x^2 - y, \quad g_3(x,y) = x + y$.
תנאי הרגולריות מתקיים כי לכל $i = 1,2,3$ קיים (x,y) אשר $g_i(x,y) < 0$.
נחשב ∇f ו- ∇g_i : $\nabla f(x,y) = (1,0)$ $\nabla g_1(x,y) = (2x,2y)$, $\nabla g_2(x,y) = (2x,-1)$,
$\nabla g_3(x,y) = (1,1)$.
אם (x,y) הוא הפתרון של הבעיה אז קיימים מספרים $\lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0, \quad \lambda_3 \ge 0$
שמקיימים לתנאים:

3. במחסן ניתן לאחסן עד n יחידות מוצר. נניח שהביקוש הוא אקראי ו- p_i היא ההסתברות שהביקוש בתקופה מסוימת יהיה i יחידות המוצר. ידועים הנתונים הבאים:
- 1תשלום להזמנה Q יחידות המוצר הוא $C(Q)$; ההזמנה נעשית בתחילה כל תקופה.
- 2תשלום לאחסון ξ יחידות המוצר במשך התקופה הוא $f(\xi)$; $f(\xi)$ תלוי רק במלאי בתחילת התקופה.
- 3הקנס להעדר מלאי: אם הביקוש בתקופה הוא מעל המלאי ל- j יחידות המוצר, הקנס הוא $g(j)$.

נא לרשום את משוואת בלמן לפונקציה $Z(\xi)$ (כל ההוצאות לזמן בלתי מוגבל אם מתחילים במלאי התחלתי ξ). יש לקחת בחשבון מקדם הוון
(discount factor) α .

נא לפתור את משוואת בלמן עבור הנתונים הבאים:
- 1. n=5.
- 2. $p_0 = 0.2,\ p_1 = 0.2,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.2,\ p_4 = 0.2,\ p_5 = 0.$
- 3. $C(Q) = 50Q.$
- 4. $f(\xi) = 20\xi.$

- $g(j)=100j$ .5
- $\alpha=0.9$ .6

4. נא לבצע שתי איטרציות של שיטת הכיוונים האפשריים לבעיה:

$$\min\ (x+y)$$
$$x^2-y\le 0$$
$$y-1\le 0$$

הקירוב ההתחלתי הוא . x=0.5, y=0.25

5. הוכח: פונקציה $f(x)$ קמורה וחסומה בכל מרחב E^n היא פונקציה קבועה.

6. ישנו מוט מתכת באורך mm 2000 . יש לחתוך את המוט למוטות קצרים. לכל מוט קצר ידועים אורך ומחיר שלו:

מחיר	אורך
2500	900 mm
3000	700 mm
5000	600 mm
700	500 mm
500	300 mm

כיצד לחתוך את המוט הארוך על מנת לקבל מחיר מקסימלי.

7. נא לבצע שתי איטרציות של שיטת הכיוונים האפשריים לבעיה:

$$\min\ (x+y)$$
$$x^2-y\le 0$$
$$y-1\le 0$$

הקירוב ההתחלתי הוא . x=0.5, y=0.25

8. נתונה פונקציה $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$ מוגדרת בקבוצה $C=\{(x,y)\in R^2 : y>0\}$.

א' הוכח ש-f היא פונקציה קמורה ב-C .

ב' האם f קמורה ממש?

9. מכונה בגיל i שנים עלולה להתקלקל בשנה הקרובה עם הסתברות p_i $(p_0=0)$, $p_{i+1}\ge p_i$, $p_i=1$ ל-$i\ge n$, זאת אומרת מכונה יכולה לעבוד לכל היותר n שנים).

בסוף כל שנה מחליטים האם לקנות מכונה חדשה או להמשיך להשתמש במכונה ישנה. המחיר למכונה חדשה הוא A. אם משתמשים במכונה ישנה בגיל i, ההוצאות שנתיות לניצול המכונה הן g_i $(g_{i+1} > g_i)$. אבל אם המכונה תתקלקל במשך השנה יצטרכו לקנות מכונה חדשה במחיר B $(B > A)$.

א'. כתוב את משוואת בלמן לפונקציה $v(i)$: מינימום התוחלת של ההוצאות לזמן בלתי מוגבל אם מתחילים במכונה בגיל i. יש לקחת בחשבון מקדם ההיוון $\alpha < 1$.
ב'. כתוב את הבעיה בתכנון ליניארי שמאפשרת למצוא את הפתרון של משוואת כלמן.

10. נניח שA קבוצה קמורה אם נקודת קיצון, $f(x)$ היא פונקציה קמורה ממש ב-A, וקיים $\max\limits_{x\in A} f(x)$.
הוכח: אם $\max\limits_{x\in A} f(x) = f(x^*)$ אז x^* היא נקודת קיצון של A.

11. פתור הבעיה:

$$\max(x_1^2 + 2x_2 + \frac{1}{x_3 + 1} + 2x_4^2)$$

בתנאים

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6,$$

$x_j \geq 0$, וכל x_j הוא מספר שלם.