1. נניח $f(x)$ היא פונקציה שמוגדרת בקבוצה $A \subset R^n$. נגדיר:

$$f^*(y) = \sup_{x \in A}((x, y) - f(x))$$

פונקציה $f^*(y)$ נקראת פונקציה צמודה ל- $f(x)$. היא מוגדרת לכל $y \in R^n$ אך יתכן ש- $f^*(y) = +\infty$.

הוכח

א. פונקציה $f^*(y)$ היא פונקציה קמורה.

ב. אם פונקציה $f(x)$ היא פונקציה קמורה וגזירה, קבוצה $\{y \in R^n : f^*(y) < \infty\}$ היא קבוצה לא ריקה וקמורה.

הפתרון.

א. פונקציה $f_x(y) = (x, y) - f(x)$ היא פונקציה ליניארית, זאת אומרת היא פונקציה קמורה לכל $x \in A$. לכן פונקציה $f^*(y) = \sup_{x \in A} f_x(y)$ היא פונקציה קמורה.

ב. מכיוון ש- $f(x)$ פונקציה קמורה וגזירה,

$$f(z) - f(x) \geq (\nabla f(x), z - x)$$

או

$$(\nabla f(x), z) - f(z) \leq (\nabla f(x), x) - f(x)$$

לכל $x, z \in A$. ניקח $y = \nabla f(x)$ אז

$$f^*(y) = \sup_{z \in A}((z, \nabla f(x)) - f(z)) \leq (\nabla f(x), x) - f(x) < \infty$$

לכן קבוצה $C = \{y \in R^n : f^*(y) < \infty\}$ היא קבוצה לא ריקה. C קבוצה קמורה מפני שפונקציה $f^*(y)$ קמורה לפי א'.