אוניברסיטה בן גוריון בנגב

מדור הבחינות

תאריך הבחינה: **08.03.13**

שמות המרצים: ל.ברזנסקי,

מספר הקורס 201.1.131

שם הקורס תורת ההסתברות 1

סמסטר:א; מועד:ב' 13-2012 שנה:

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 3 דפ' נוסחאות מצורפות

מחשב כיס עם מסך קטן.

יש לענות על 4 שאלות

מתוך 5

השאלות שוות

בערכן

שאלה1.

נתון: $Y \sim U(0,2), X \sim U(-1,1)$ **בילתי תלוים.**

א) $Z = Y - X$ **מצא** $F_Z(z)$ **10 נ'**

ב) מצא $P(X+Y>1 \mid Y-X<2)$ **8 נ'**

ג) מצא $\rho(2X+Y, X-Y+1)$ **7 נ'**

שאלה 2.

נתון: $X \sim U(-2,1)$, $Y=(x^2-1)^2$, $V=\begin{cases} 2+X, & -2<X<-1, \\ 2X, & 0<X<1, \\ 0, & otherwise \end{cases}$.

א)מצא את פונקצית הצפיפות $f_Y(y)$. 8 נ'

ב) מצא $F_V(v)$. 8 נ'

ג) מ"מ $Y_1,Y_2,...,Y_n$ ב"ת ומתפלגים כמו $\sqrt{X+2}$.

מצא בקירוב $p(\sum_{i=1}^{100} Y_i < 160)$. 9 נ'

שאלה 3.

קוביה נזרקת פעמיים. נסמן Y - מספר פעמים, שמופיע מספר זוגי, X - מספר שמופיע בקוביה ראשונה .

א) מצא פונקציה הסתברות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$. 10 נ'

ב) . היאם X ו Y בילתי תלוים?, בילתי מתואמים? 5 נ'

ג) זורקים שתי קוביות מספר פעמים עד שמקבלים בכל קוביה מספר אי-זוגי . נסמן X מספר פעמים עד סוף הניסוי. מצא $E(X^2)$ 10 נ'

שאלה 4.

אין קשר בין סעיפים.

א) מספר אנשים המגיעים לחנות מתפלג פואסוני עם ממוצע 3 אנשים בשעה.

(1) מצא הסתברות, שבין שעות 11 -9 יגיעו יותר מ- 3 אנשים. 6 נ'

(2) נסמן X- מספר אנשים המגיעים בין 9 ל 12, Y- מספר אנשים המגיעים בין 10 ל 13. מצא $\rho(X,Y)$. 10 נ'

ב) מטילים קוביה אינסוף פעמים. נסמן X- מספר פעמים עד שמקבלים "1" בפעם השלישית, Y- מספר פעמים עד שמקבלים "1" בפעם השניה. מצא $Cov(X,Y)$. 9 נ'

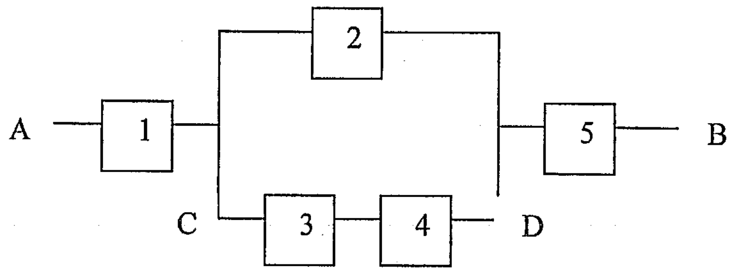
שאלה 5

נתונה מערכת אלקטרונית. זמן חיים של כל אלמנט $X_i \sim \exp(\lambda = 1)$ (בשעות). אלמנטים בילתי תלוים.

א) מצא $F_{X_{AB}}(t)$, $E(X_{AB})$, כאשר X_{AB} - זמן החיים של המערכת. 10 נ'

ב) מה הסתברות שמערכת תעבוד בלי תקלה לכל היותר שעתיים, אם ידוע, שחלק CD כבר עובד בלי תקלה שעה. 6 נ'

ג) אלמנט 5 מחליפים מיד אחרי תקלה. מה הסתברות שבתוך 8 שעות צריך להחליף אותו יותר מ 3 פעמים אם ידוע שמספר החלפות קטן מ 8. 9 נ'



בהצלחה!

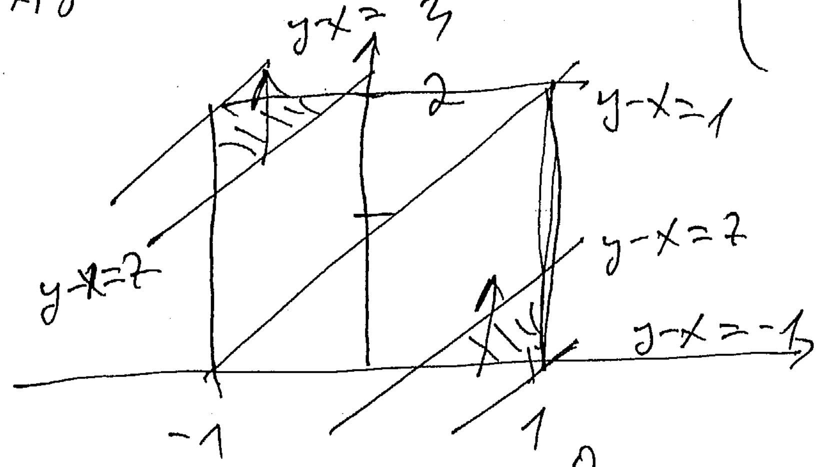
08. 03. 13

1 άσκ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1<x<1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<y<2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1<x<1,\ 0<y<2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<-1 \\ \frac{(1+z)^2}{8}, & -1\le z<1 \\ 1-\frac{1}{8}(z-3)^2, & 1\le z<3 \\ 1 & z\geq 3 \end{cases}$$

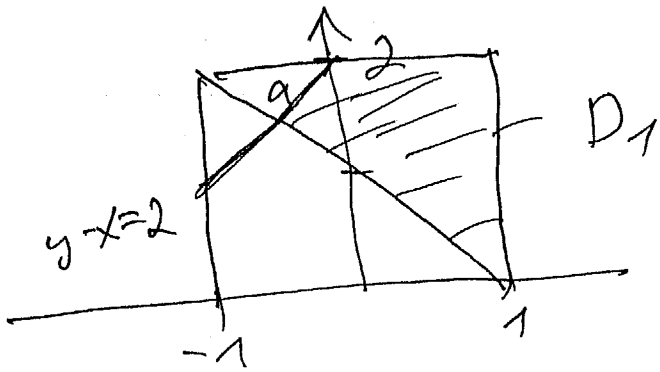
$-1\le z<1$, $\quad F_Z(z) = \frac{1}{4}\int_{-z}^{1} dx \int_{0}^{x+z} dy = \frac{(1+z)^2}{8}$

$1\le z<2$, $\quad F_Z(z) = 1-\frac{1}{4}\int_{-1}^{2-z} dx \int_{x+z}^{2} dy =$

$= 1-\frac{1}{8}(z-3)^2$

(2

$$p = \frac{P(x+y>1,\ y-x<2)}{P(y-x<2)}$$



$$a = \sqrt{\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(x+y>1,\ y-x<2) = \iint_{D_1} \frac{1}{4}\,dx\,dy = \frac{1}{4}|D_1| =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2 - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$P(y-x<2) = P(z<2) = F_Z(2) = \frac{7}{8}$$

$$p = \frac{7/16}{7/8} = \frac{1}{2}$$

(2

$$\rho(2x+y,\ x-y+1) = \frac{\operatorname{Cov}(2x+y,\ x-y+1)}{\sqrt{\operatorname{Var}(2x+y)\cdot\operatorname{Var}(x-y+1)}}$$

$$\operatorname{cov}(2x+y,\ x-y+1) = \operatorname{Cov}(2x,x) - \operatorname{Cov}(y,y) =$$

$$= \cancel{2\operatorname{Cov}(} = 2\operatorname{Var}(x) - \operatorname{Var}(y) = 2\cdot\frac{2^2}{12} - \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Var}(2x+y) = \operatorname{Var}(2x) + \operatorname{Var}(y) = 4\operatorname{Var}(x) + \operatorname{Var}(y) = \frac{5}{3}$$

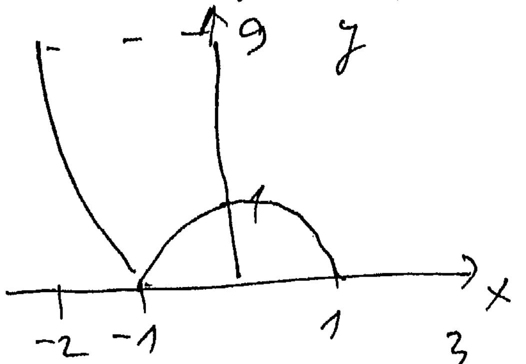
$$\operatorname{Var}(x-y+1) = \operatorname{Var}(x) + \operatorname{Var}(y) = \frac{2}{3}$$

$$\rho = \frac{1/3}{\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$X \sim U(-2,1)$, $\quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -2<x<1 \\ 0, & \text{δ/ακ} \end{cases}$ $\qquad$ 2 ιδ κε

(κ

$X = \pm\sqrt{1\pm y}$, $\quad h_1 = -\sqrt{1+\sqrt{y}}$, $h_2 = -\sqrt{1-\sqrt{y}}$, $h_3 = \sqrt{1-\sqrt{y}}$



$\underline{0<y<1}$, $\quad f_Y(y) = \sum_{i=1}^{3} f_X(h_i(y))\,|h_i'(y)| =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4\sqrt{(1+\sqrt{y})\cdot y}} + \frac{2}{4\sqrt{(1-\sqrt{y})\,y}} \right)$

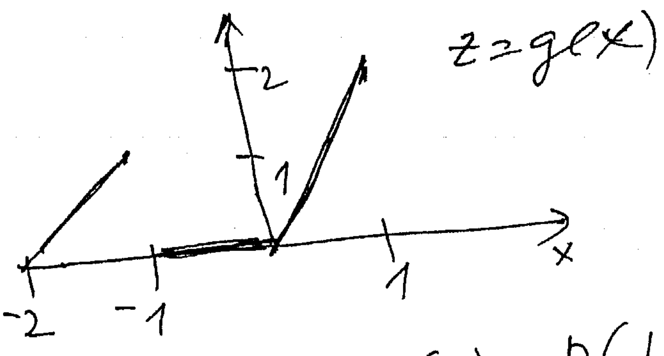
$\underline{1<y<9}$, $\quad f_Y(y) = f_X(h_1(y))\cdot|h_1'(y)| =$

$= \frac{1}{12\sqrt{(1+\sqrt{y})\,y}}$

$f_Y(y) = 0 \quad$ δ/ακ

(α

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<-2 \\ \frac{x+2}{3}, & -2\le x<1 \\ 1, & x\geq 2 \end{cases}$



$0 \leq v < 1$, $\quad F_V(v) = p(V<0) + p(V=0) +$ $p(-1<X<0) + p(-2<X<v-2) +$

$+ p(0<V<v) = p(-1<X<0) + p(-2<X<v-2) +$ $F_X(0) - F_X(-1) + F_X(v-2) -$

$+ p\left(0<X<\frac{v}{2}\right) = F_X(0)-F_X(-1)+F_X(v-2) -$

$- F_X(-2) + F_X\left(\frac{v}{2}\right) - F_X(0) = \frac{3v+2}{6}$

$1 \le v < 2$

$$F_V(v) = p(V<1) + p(V=1) + p(1<V\le v) =$$

$$= F_V(1) + 0 + p\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{v}{2}\right) = \frac{v+4}{6}$$

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v<0 \\ \frac{3v+2}{6}, & 0 \le v < 1 \\ \frac{v+4}{6}, & 1 \le v < 2 \\ 1, & v \ge 2 \end{cases}$$

(2

$$\mu = E(\sqrt{x+2}) = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} \sqrt{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left.\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\right|_{-2}^{1} = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15$$

$$\sigma^2 = E(x+2) - [E(\sqrt{x+2})]^2 = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0.4$$

$$p\left(\sum_{i=1}^{100} y_i < 160\right) \approx p\left(Z < \frac{160 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \varphi\left(\frac{160 - 1.15 \cdot 100}{0.4 \cdot 10}\right) = \varphi(11.25) \approx 1$$

שאלה 3

א)

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x_k)$
1	1/12	1/12	0	1/6
2	0	1/12	1/12	1/6
3	1/12	1/12	0	1/6
4	0	1/12	1/12	1/6
5	1/12	1/12	0	1/6
6	0	1/12	1/12	1/6
$f_Y(y_l)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\Sigma=1$

ב)

$0 = p(X=2, Y=0) \neq p(X=2) \cdot p(Y=0)$

לכן X ו Y תלויים

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - EX \cdot EY$

$X \sim U(1,2,\dots,6)$, $EX = \frac{1+N}{2} = \frac{7}{2}$

$EY = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,

$E(XY) = \frac{1}{12}(1+2+4+3+4+8+5+6+12) = \frac{15}{4}$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{15}{4} - \frac{7}{2}\cdot 1 \neq 0 \Rightarrow$ מתואמים X ו Y

ג)

$p(A) = \frac{1}{4}$ ניסיונות עד הצלחה

$X \sim G\left(p = \frac{1}{4}\right)$, $EX = \frac{1}{p} = 4$,

$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = 12$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$

$E(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (EX)^2 = 12 + 16 = 28$

שאלה

(א

$$X \sim P(\mu = 6)$$

$$f_X(k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

$$f_X(k) = e^{-6}\frac{6^k}{k!}$$

(1)

$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) =$$
$$= 1 - e^{-6}\left(1 + 6 + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{3!}\right)$$

(2)

X_1 – מספר הגיעו בין 9 ל 10, (NO)

X_2 – בין 10 ל 11, ...,

X_4 – בין 12 ל 13

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

$$Y = X_2 + X_3 + X_4,$$

$$X_i \sim P(\mu = 3)$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X_1 + X_2 + X_3, X_2 + X_3 + X_4) = \mathrm{Cov}(X_2, X_2) + \mathrm{Cov}(X_3, X_3) = \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) = 2\mu = 6$$

$$X, Y \sim P(\mu = 9), \quad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 9$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(ב

$$X - Y \sim G\left(p = \tfrac{1}{6}\right),$$

$$X \sim NB\left(n = 3, p = \tfrac{1}{6}\right), \quad Y \sim NB\left(n = 2, p = \tfrac{1}{6}\right)$$

$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) - 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$\frac{1 - 1/6}{1/36} = \frac{3(1 - 1/6)}{1/36} + \frac{2(1 - 1/6)}{1/36} - 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 60$$

שאלה 5

ג)

$X_{AB} = \min\{X_1, X_5, \max\{X_2, \min\{X_3, X_4\}\}\}$

$F_{X_{AB}}(t) = 1-(1-F_{X_1}(t))(1-F_{X_5}(t))(1-F_{X_2}(t)\cdot F_{\min\{X_3,X_4\}}(t)) =$

$= 1-(1-F_{X_1}(t))(1-F_{X_5}(t))[1-F_{X_2}(t)(1-(1-F_{X_3}(t))(1-F_{X_4}(t)))] =$

$= 1-e^{-2t}[1-(1-e^{-t})(1-e^{-2t})] = 1-e^{-3t}-e^{-4t}+e^{-5t}, \quad t\geq 0$

$EX = \int_0^\infty [1-F_{X_{AB}}(t)]dt = \int_0^\infty (e^{-3t}+e^{-4t}-e^{-5t})dt =$

$= -\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-4t}+\frac{1}{5}e^{-5t}\Big/_0^\infty = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

ב)

$P(X_{AB}\leq 2 \mid X_{CD}>1) = 1-\frac{P(X_{AB}>2,\ X_{CD}>1)}{P(X_{CD}>1)} =$

$= 1-\frac{P(X_1>2,\ X_5>2,\ X_{CD}>2,\ X_{CD}>1)}{P(X_{CD}>1)} =$

$= 1-\frac{P(X_1>2)\cdot P(X_5>2)\ P(X_{CD}>2)}{P(X_{CD}>1)} =$

$(F_{X_{CD}}(t) = (1-e^{-t})(1-e^{-2t}) = 1-e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t})$

$= 1-\frac{e^{-4}(1-e^{-2}-e^{-4}+e^{-6})}{1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}}$

ד)

$Y\sim P(\mu=\lambda t) \Rightarrow Y\sim P(\mu=8)$ מספר הקלטות

$P(Y=k) = e^{-8}\frac{8^k}{k!}, \quad k=0,1,\ldots$

$P(Y>10 \mid 2|Y) = \frac{P(Y>10,\ 2|Y)}{P(2|Y)} =$

$= \frac{e^{-8}\left(\frac{8^{12}}{12!}+\frac{8^{14}}{14!}+\ldots\right)}{\ldots}$