## אוניברסיטה בן גוריון בנגב
## מדור הבחינות

**תאריך הבחינה: 17.02.13**
שמות המרצים: ל.ברזנסקי,
מספר הקורס 201.1.131
שם הקורס תורת ההסתברות 1
שנה: **2012-13** סמסטר:א; מועד:א׳
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפ׳ נוסחאות
מצורפות
מחשב כיס עם מסך קטן.

יש לענות על 4
שאלות מתוך 5
השאלות שוות
בערכן.

**שאלה 1.**

מ״מ דו-ממדי $(X,Y)$ נתון ע״י פונקציה צפיפות משותפת

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} C, & x-1\le y\le x+1, \\ & 1-x\le y\le 3-x, \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

א) מצא $C$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 10 נ׳

ב) האם X ו- Y *בלתי* תלוים? בלתי מתואמים? 8 נ׳

ג) מצא $f_{X|Y}(x|y)$, $E(X|Y=0.5)$ 7 נ׳

**שאלה 2.**

א) מטילים קוביה 100 פעמים. מה ההסתברות שסכום תוצאות
יהיה בין 320 ל 380. 8 נ׳

ב) כמה פעמים צריך להטיל קוביה כך שסכום יהיה לפחות 500 עם הסתברות לא קטנה מ- 0.95 9 נ'
ג) מטילים קוביה 100 פעמים. מצא ההסתברות שמיספר "6" מופיע בין 17 ל 20 פעמים? (להשתמש קירוב נורמלי) 8 נ'

## שאלה 3.

נתון: $X \sim \exp(\lambda = 1)$, $Y = (X-1)^2$, $Z = \begin{cases} X+1, & 0 < X < 1, \\ X-1, & 1 < X < 2, \\ 1, & X > 2, \end{cases}$

א) מצא $f_Y(y)$ 10 נ'

ב) מצא $F_Z(z)$ 10 נ'

ג) חשב $p(Z \ge Y)$ 5 נ'

## שאלה 4.

א) $Y \sim U(0,2), X \sim U(0,1)$ , $X$ , $Y$ בילתי תלוים.

(1) מצא $p(X > Y)$ 6 נ'

(2) מצא $Cov(X+1, \frac{1}{X+1})$ 6 נ'

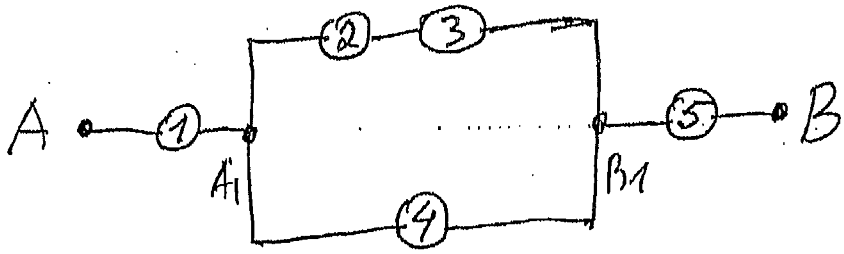
ב) מטילים מטבע 4 פעמים. נסמן: **X**- מספר פעמים שמקבלים ראש בכל 4 הטלות, **Y** - מספר פעמים שמקבלים ראש ב 2 הטלות ראשונות. מצא

(1) $f_{X,Y}(x_k, y_l)$ , 8 נ'

(2) $E(X \mid Y=1)$ . 5 נ'

## שאלה 5

נתונה מערכת אלקטרונית, כאשר $X_i \sim \exp(\lambda = 1), i = 1, \ldots 6$ זמן עבודה של אלמנטים בילתי תלוים. נסמן $X_{AB}$ זמן עבודה של כל מערכת.




מצא

א) $E(X_{AB}), F_{X_{AB}}(t)$ 10 נ'

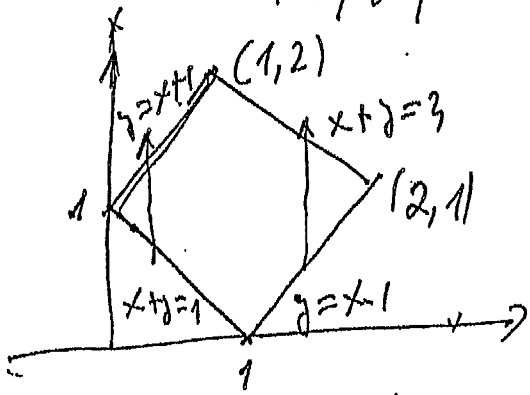
ב) $p(X_{AB} > 3 | X_1 > 1)$ 8 נ'

ג) מקדם מיתאם $\rho(X_1 + X_2, X_2)$ 7 נ'

<u>בהצלחה!</u>

17/2/13

שאלה 1




$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

א)

$\iint_D c\,dx\,dy=1$ , $c|D|=0$ , $c\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=1$

$c=1/2$

$f_X(x)=\cancel{\int\frac{1}{2}dy}\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ ;

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1<x<2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$\underline{0<x<1}$ $\quad f_X(x)=\int_{1-x}^{x+1}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(x+1-1+x)=x$

$\underline{1<x<2}$ $\quad f_X(x)=\int_{x-1}^{3-x}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(3-x-x+1)=2-x$

מסימטריה נקבל

$$f_Y(y)=\begin{cases}y, & 0<y<1\\ 2-y, & 1<y<2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

ב) X,Y בלתי תלויים אם

$\forall(x,y)\in D$ , $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$x=1,\ y=\frac{1}{3}\Rightarrow f_{X,Y}(1,\frac{1}{3})=\frac{1}{2},\ f_X(1)=1,\ f_Y(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$

$f_{X,Y}(1,\frac{1}{3})\neq f_X(1)\cdot f_Y(\frac{1}{3})\Rightarrow$ $\underline{\text{X,Y תלויים}}$

$Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-EX\cdot EY$

$E(XY)=\iint_{-\infty}^{\infty}xy\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_D xy\,dx\,dy=$

$=\frac{1}{2}\Big(\int_0^1 x\,dx\int_{1-x}^{x+1}y\,dy+\int_1^2 x\,dx\int_{x-1}^{3-x}y\,dy\Big)=$

$$\frac{1}{2}\left( \int_0^1 x\,dx \left( \frac{y^2}{2}\Big|_{1-x}^{1+x} \right) + \int_1^2 x\,dx \left( \frac{y^2}{2}\Big|_{x-1}^{3-x} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left( \int_0^1 x\left[ (1+x)^2-(1-x)^2 \right] dx + \int_1^2 x\left[ (3-x)^2-(x-1)^2 \right] dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[ \int_0^1 4x^2\,dx + \int_1^2 x(8-4x)\,dx \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[ \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 + \left( 4x^2 - \frac{4x^3}{3} \right)\Big|_1^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left( \frac{4}{3} + \left(16 - \frac{32}{3}\right) - \left(4 - \frac{4}{3}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left( 12 - \frac{24}{3} \right) = 1$$

$$EX = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 3 - \frac{6}{3} = 1, \quad Ey = 1$$

$Cov(X,Y) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ הם לא מתואמים

(2

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

1) $0<y<1$ $\quad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & 1-y<x<1+y \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

2) $1<y<2$ $\quad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2(2-y)} & y-1<x<3-y \end{cases}$

$y = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{X|Y}(x|\frac{1}{2}) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

$$E(X|Y=\tfrac{1}{2}) = \int_{1/2}^{3/2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{3/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) = 1$$

2,5 ke / c

$X_k \sim U(1,2,\dots,6)$, $\mu = EX_k = \frac{7}{2}$, $\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}}$

$$p\left(320 \le \sum_{k=1}^{100} X_k \le 360\right) = p\left(\frac{320-\mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{360-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{360-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{320-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{35}{12}}}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{\frac{35}{12}}}\right)$$

$$= \Phi(1.76) - \Phi(-1.76) = 0.92$$

$p\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > 500\right) \ge 0.9$, $\quad p\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \le 500\right) \le 0.1$ (c

$$p\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{500-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \le 0.1$$

$$\Phi\left(\frac{500-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \le 0.1 \qquad \frac{500-3.5n}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{n}} \le 0.46$$

$$3.5n + 0.46\sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt{n} - 500 \ge 0$$

$\sqrt{n} = t$, $\quad t \ge 11.8$, $\quad n \ge (11.8)^2 = 139.2 \Rightarrow$

$\underline{n \ge 140}$

(c

$X \sim B\left(n=100,\ p=\frac{1}{6}\right)$

$$p(17 \le X \le 20) \approx \Phi\left(\frac{20-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{17-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) =$$

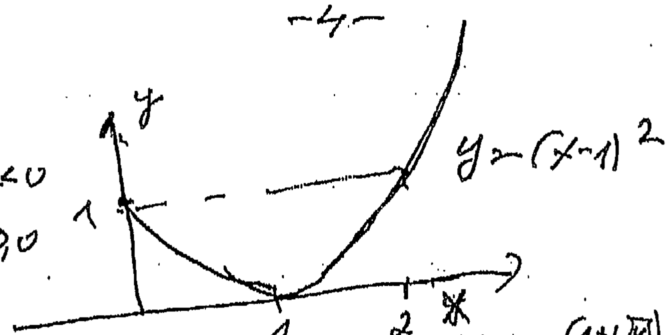
$$= \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.894) - \Phi(0.09) =$$

$$= 0.813 - 0.5 = 0.313$$

3 лбкс

кс

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$




$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(1-\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+e^{-(1+\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ e^{-(1+\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}, & y\geq 1\end{cases}$$

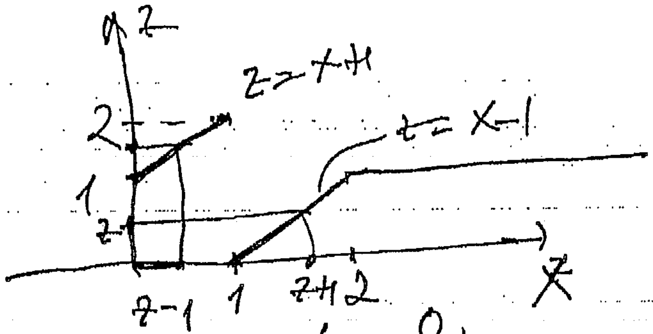
$\underline{0<y<1}$, $(x-1)^2=y$, $x-1=\pm\sqrt{y}$

$h_1(y)=1-\sqrt{y}$, $h_2(y)=1+\sqrt{y}$

$$f_Y(y)=f_X(h_1(y))\cdot|h_1'(y)|+f_X(h_2(y))\cdot|h_2'(y)|=$$

$$=e^{-(1-\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+e^{-(1+\sqrt{y})}\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$\underline{y>1}$ $f_Y(y)=f_X(h_2(y))\cdot|h_2'(y)|=e^{-(1+\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$




(2

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ e^{-1}-e^{-(z+1)}, & 0\leq z<1\\ 1+e^{-1}-e^{-(z-1)}, & 1\leq z<2\\ 1, & z\geq 2\end{cases}$$

$\underline{0\leq z<1}$ $F_Z(z)=P(Z\leq z)=\overset{=0}{P(Z<0)}+\overset{=0}{P(Z=0)}+P(0<Z<z)=P(1<X<z+1)=F_X(z+1)-F_X(1)=$

$$=\left(1-e^{-(z+1)}\right)-\left(1-e^{-1}\right)=e^{-1}-e^{-(z+1)}$$

$1 \le z < 2$

$F_Z(z) = F_Z(1-) + P(Z=1) + P(1<Z\le z) =$

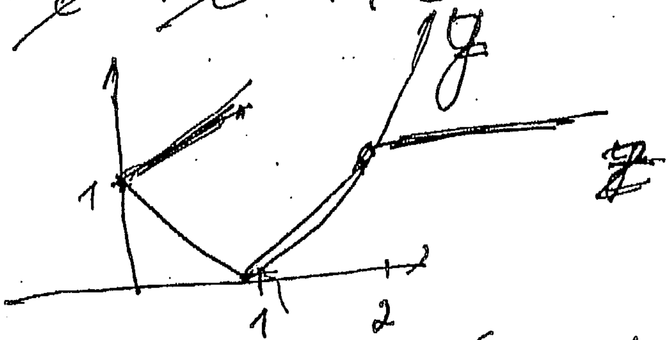
$= e^{-1} - e^{-2} + P(X>2) + P(0<X<z-1) =$

$= e^{-1} - e^{-2} + (1 - F_X(2)) + (F_X(z-1) - F_X(0)) =$

$= e^{-1} - e^{-2} + 1 - (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-(z-1)}) - 0 =$

$= e^{-1} - \cancel{e^{-2}} + \cancel{e^{-2}} + 1 - e^{-(z-1)} = 1 + e^{-1} - e^{-(z-1)}$

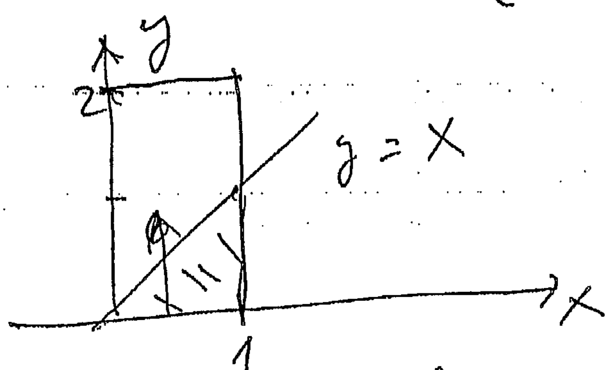
(z.




$P(Z \ge 2) = P(X \le 2) = F_X(2) =$

$= 1 - e^{-2}.$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ [illegible]




$P(X>Y) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_D dx\,dy =$

$\frac{1}{2}|D| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1/4$

(2)

$$\operatorname{Cov}\left(X+1, \frac{1}{X+1}\right) = E(1) - E(X+1) \cdot E\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

$$E(X+1) = EX + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2},$$

$$E\,\frac{1}{X+1} = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2$$

$$\operatorname{Cov}\left(X+1, \frac{1}{X+1}\right) = 1 - \frac{3}{2}\cdot \ln 2$$

(2

(1)

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 | $f_X(x_k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/16 | 0 | 0 | 1/16 |
| 1 | 1/8 | 1/8 | 0 | 1/4 |
| 2 | 1/16 | 1/4 | 1/16 | 3/8 |
| 3 | 0 | 1/8 | 1/8 | 1/4 |
| 4 | 0 | 0 | 1/16 | 1/16 |
| $f_Y(y_l)$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 | $\Sigma = 1$ |

(2)

$E(X \mid Y = 1)$ – ?

| $X \mid Y=1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_{X\mid Y=1}$ | 0 | 1/4 | 1/2 | 1/4 | 0 |

$$p(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{p(X=1, Y=1)}{p(Y=1)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$E(X \mid Y = 1) = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 2$$

$$X_{AB} = \min\{X_1, X_5, \max\{X_4, \overbrace{\min\{X_2, X_3\}}^{\text{блоке}}\}\}$$ (б

$$F_{X_{AB}}(t) = 1-(1-F_{X_1}(t))(1-F_{X_5}(t))\left[1-F_{X_4}(t)\left(1-(1-F_{X_2}(t))(1-F_{X_3}(t))\right)\right] =$$

$$= 1-e^{-2t}\left(1-(1-e^{-t})(1-e^{-2t})\right) = 1-e^{-3t}-e^{-4t}+e^{-5t}, \quad t>0$$

$$E\,X_{AB} = \int_0^\infty \left[1-(1-e^{-3t}-e^{-4t}+e^{-5t})\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty (e^{-3t}+e^{-4t}-e^{-5t})\,dt = \left(-\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{4}e^{-4t}+\frac{1}{5}e^{-5t}\right)\Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5} = 0.3833$$ (а

$$P(X_{AB}>3 \mid X_1>1) = \frac{P(X_{AB}>3,\ X_1>1)}{P(X_1>1)} =$$

$$= \frac{P(X_{AB}>3)}{P(X_1>1)} =$$

$$= \frac{1-F_{X_{AB}}(3)}{1-F_{X_1}(1)} = \frac{e^{-9}+e^{-12}-e^{-15}}{e^{-1}}$$

$$= e^{-8}+e^{-11}-e^{-14} \approx 3.5\times 10^{-4}$$

$$\rho(X_1+X_2,\ X_3) - ?$$ (г

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(X_1 + X_2, X_2)}{\sigma(X_1 + X_2)\,\sigma(X_2)}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_2) = \mathrm{cov}(X_1, X_2) + \mathrm{cov}(X_1, X_2)$$

$$= \mathrm{Var}(X_2) = \frac{1}{\lambda^2} = 1, \quad \sigma(X_2) = \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 2$$

$$\sigma(X_1 + X) = \sqrt{2} \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$$