אוניברסיטה בן גוריון בנגב
מדור הבחינות

תאריך הבחינה 18.02.11
שם המורה ל.ברזנסקי, י. שטראוס
מספר הקורס 201.1.131
שם הקורס תורת ההסתברות 1
שנה: תשס"ה; סמסטר:א; מועד:ב
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות מצורפות
מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4 שאלות מתוך 5</u>
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאל

<u>שאלה 1.</u>

נתון שני מ"מ רציפים בלתי תלוים $X \sim U(1,3)$ $f_Y(y)=\begin{cases} cy, & 0<y<2 \\ 0, & otherwise \end{cases}$.

א) מצא $f_{X,Y}(x,y), F_Y(y), c$. 7 נ'

ב) מצא $P(X+Y>2 \mid Y<1)$. 8 נ'

ג) נסמן $Z=\begin{cases} X, & X>Y \\ Y, & X\le Y \end{cases}$. מצא $P(Z\le 1.5)$ 10 נ'

<u>שאלה 2.</u>

נתון $X \sim \exp(\lambda=1)$.

א) $Y=\sqrt{|X-1|}$. מצא $f_Y(y)$. 9 נ'

ב) $Z=[X]$ - חלק שלם של X. מצא פונקציה הסתברות של Z: $f_Z(z_k)$. 8 נ'

ג) מצא $E(\max\{X,1-X\})$ 8 נ'

<u>שאלה 3.</u>

בן אדם בוחר אחד משלושה כרטיסים המסומנים במספרים 1,2,3 ואחרי זה מטיל מטבע מספר פעמים הרשום בכרטיס. נסמן X - מספר בכרטיס הנבחר, Y - מספר פעמים שמקבלים "עץ" בהטלת המטבע.

א) מצא $f_{X,Y}(x_n,y_m)$. 10 נ'

ב) מצא $E(XY), E\left(\dfrac{X}{X+1}\right)$. 7 נ'

ג) מצא $P(X>Y+1)$. 8 נ'

שאלה 4.

אין קשר בין סעיפים.

א) $X_1, X_2, ..., X_n \sim P(\mu = 4)$ - מ"מ בלתי תלוים. מצא n מינימלי כך ש $P(X_1 + X_2 + ... + X_n > 100) \geq 0.9$. 9 נ'

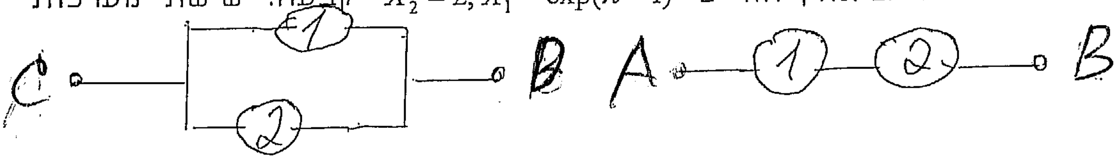
ב) מטילים קוביה 10 פעמים. נסמן X - מספר פעמים שמקבלים מספר זוגי, Y - מספר פעמים שמקבלים מספר 6 . מצא $Cov(X,Y)$. 8 נ'

ג) $X \sim B(n=3, p=0.5)$, $Y \sim B(n=3, p=0.5)$ מ"מ בלתי תלוים. מצא $P(X+Y>3)$
8 נ'

ד)

שאלה 5.

יש שני אלמנטים עם אורך החיים $X_2 = 2, X_1 \sim \exp(\lambda = 1)$ - קבועה. יש שתי מערכות



א) מצא $E(X_{AB}), F_{X_{AB}}(t)$. 9 נ'

ב) מצא $E(X_{CD}), F_{X_{CD}}(t)$. 9 נ'

ג) $Y = (X_{CD})^2$. מצא $F_Y(y)$. 7 נ'

הצלחה!

פתרון של שאלה 1

א)

$$\int_0^2 cy\,dy = c\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 = 2c = 1, \qquad c = \frac{1}{2}$$

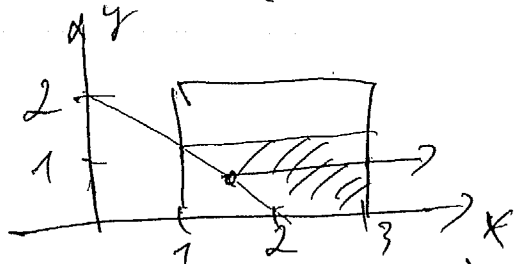
$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 \le y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^y \frac{1}{2}\cancel{t}\,d\cancel{t} = \frac{\cancel{t}^2}{4}\Big|_0^y = \frac{y^2}{4}$$

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x)\cdot f_y(y) = \begin{cases} \frac{y}{4}, & 1 < x < 3,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < x < 3 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב)



$$p(x+y > 2 \mid y < 1) = \frac{p(x+2 > 2,\ y < 1)}{p(y < 1)}$$

$$p(x+y > 2,\ y < 1) = \iint_D \frac{y}{4}\,dx\,dy = \frac{1}{4}\int_0^1 dx \int_{2-y}^3 y\,dx =$$

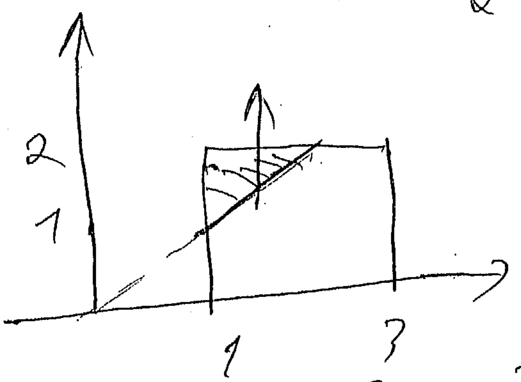
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 yx\Big|_{2-y}^3 dy = \frac{1}{4}\int_0^1 y(1+y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{24}$$

$$p(y < 1) = F_y(1) = \frac{1}{4}$$

$$p(x+y > 2 \mid y < 1) = \frac{5/24}{1/4} = \frac{5}{6}$$

(2



$$p(X<y) = \frac{1}{4}\int_1^2 dx \int_x^2 y\,dy = \frac{1}{8}\int_1^2 y^2\Big|_x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^2 (4-x^2)\,dx = \frac{1}{8}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{24}$$

$$p(X \geq y) = \frac{19}{24}$$

$$p(Z \leq 1.5) = p(X \geq y)\, p(Z \leq 1.5 \mid X > y) +$$

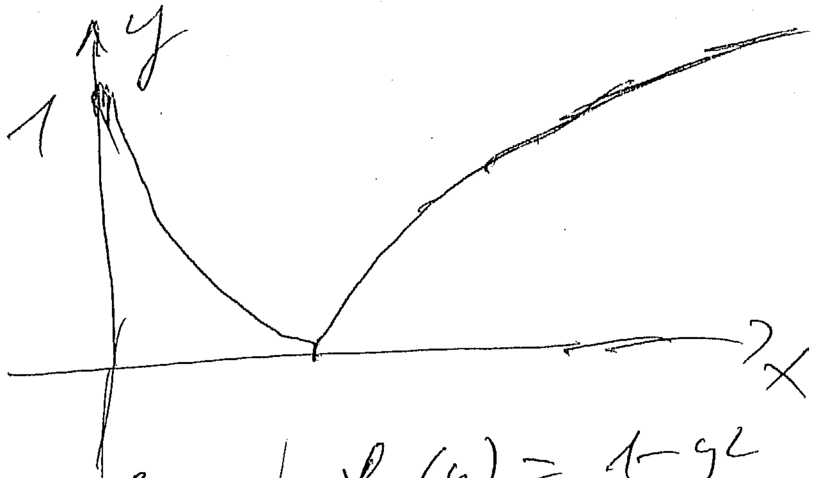
$$+ p(X \leq y) \cdot p(Z \leq 1.5 \mid X \leq y) =$$

$$= \frac{19}{24} \cdot p(X \leq 1.5) + \frac{5}{24}\, p(y \leq 1.5) =$$

$$= \frac{19}{24} F_X(1.5) + \frac{5}{24} F_y(1.5) =$$

$$= \frac{19}{24} \cdot \frac{1.5-1}{2} + \frac{5}{24} \cdot \frac{(1.5)^2}{2} = \frac{47}{192}$$

2.8.KC



1) $-x = y^2$, $h_1(y) = 1 - y^2$

2) $x - 1 = y^2$, $h_2(y) = 1 + y^2$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 2y[e^{-(1-y^2)} + e^{-(1+y^2)}], & 0 < y < 1 \\ e^{-(1+y^2)} \cdot 2y, & y > 1 \end{cases}$$

$\underline{0 < y < 1}$ $\quad f_y(y) = f_X(h_1(y)) \cdot |h_1'(y)| + f_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)|$

$= e^{-(1-y^2)} \cdot 2y + e^{-(1+y^2)} \cdot 2y =$

$= 2y[e^{-(1-y^2)} + e^{-(1+y^2)}]$

$1 < y < \infty$, $\quad f_y(y) = f_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)| =$

$= e^{-(1+y^2)} \cdot 2y$

$$z = [x] = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ \ldots & \ldots \\ n-1, & n-1 < x < n \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

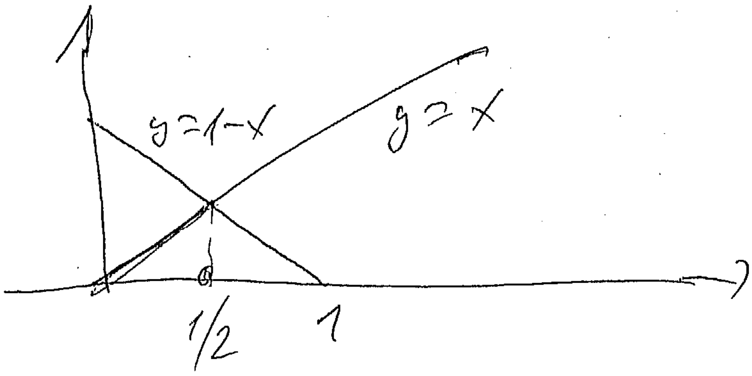
(a)

$f_Z(n) = P(n < X < n+1) =$

$= F_X(n+1) - F_X(n) = (1 - e^{-(n+1)}) - (1 - e^{-n}) =$

$= e^{-n} - e^{-(n+1)}$

(2



$$E(\max\{x,1-x\}) = \int_0^\infty \max\{x,1-x\}\, e^{-x}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2}(1-x)e^{-x}\,dx + \int_{1/2}^\infty x e^{-x}\,dx =$$

$u=1-x,\ dv=e^{-x}dx$ | $u=x \quad dv=e^{-x}dx$

$du=-dx,\ v=-e^{-x}$ | $du=dx \quad v=-e^{-x}$

$$= -(1-x)e^{-x}\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} e^{-x}\,dx - xe^{-x}\Big|_{1/2}^\infty + \int_{1/2}^\infty e^{-x}\,dx =$$

$$= \underline{-\tfrac12 e^{-1/2}} + 1 + e^{-x}\Big|_0^{1/2} + \underline{\tfrac12 e^{-1/2}} - e^{-x}\Big|_{1/2}^\infty =$$

$$= \cancel{e^{-1/2} - 1 + e^{-1/2} - 1 + e^{-1/2} = 3e^{-1/2} - 2}$$

$$= \cancel{-\tfrac12 e^{-1/2}} + \cancel{1} + e^{-1/2} \cancel{-1} + \cancel{\tfrac12 e^{-1/2}} + e^{-1/2} = 2e^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$\frac{3{,}1\delta\, ke}{(E}$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	$f_X(x_k)$
1	1/6	1/6	0	0	1/3
2	1/12	1/6	1/12	0	1/3
3	1/24	3/24	3/24	1/24	1/3
$f_Y(y_k)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\Sigma = 1$

$$E\, g(X) = \sum g(x_k) f_X(x_k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{23}{36}$$ (a

$$E(X\cdot Y) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{4}{12} + \dots + \dots + \frac{9}{24} + \frac{18}{24} + \frac{9}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(c

$$P(X > Y+1) = P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=0) + P(X=3, Y=1) =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{3}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

שאלה 4

ב)

$$P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0.90$$

$$1-\Phi\left(\frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \leq 0.1, \quad \frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}} \leq -1.28$$

$$100-\mu n < -1.28\,\sigma\sqrt{n}$$

$$4n - 2.56\sqrt{n} - 100 \geq 0,$$

$$4t^2 - 2.56\,t - 100 \geq 0, \qquad t \geq 20$$

$$\underline{n \geq 400}$$

ג)

$$X = X_2 + X_4 + X_6, \qquad Y = X_6$$

X_K – מספר הפעמים שהתקבל K.

$$\text{cov}(X_2+X_4+X_6, X_6) =$$

$$= \text{Cov}(X_2, X_6) + \text{Cov}(X_4, X_6) + \text{Cov}(X_6, X_6)$$

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{\text{Var}(X_i+X_j) - \text{Var}(X_i) - \text{Var}(X_j)}{2}$$

$$= \frac{10\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot 10\,\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{2} = \frac{\frac{20}{9} - \frac{25}{9}}{2} = -\frac{5}{18}$$

$$\text{cov}(X_6, X_6) = \text{Var}(X_6) = 10\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{18}$$

$$\text{cov}(X, Y) = -\frac{10}{18} + \frac{25}{18} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

(c

$X+Y \sim B(n=5,\ p=\frac{1}{2})$

$f_{X+Y}(k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$P(X+Y>3) = \sum_{k=4}^{5}\binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$

$= \left[\binom{5}{4}+\binom{5}{5}\right]\frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

5 бодов

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

(c

$$F_{X_2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$F_{X_{AB}}(t) = F_{\max\{X_1, X_2\}}(t) = F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$E X_{AB} = \int_0^\infty [1 - F_{X_{AB}}(t)]\,dt = \int_0^2 1\,dt + \int_2^\infty e^{-t}\,dt =$$

$$= t\Big|_0^2 - e^{-t}\Big|_2^\infty = 2 + e^{-2}$$

(a

$$F_{X_{CD}}(t) = F_{\min\{X_1, X_2\}}(t) = 1 - [(1 - F_{X_1}(t))(1 - F_{X_2}(t)] =$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$E X_{CD} = \int_0^2 e^{-t}\,dt + \int_2^\infty 0\,dt = -e^{-t}\Big|_0^2 = 1 - e^{-2}$$

(c

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}} & 0 \leq y < 4 \\ 1, & y \geq 4 \end{cases}$$

$\underline{0 \leq y < 4}$ $\quad P(Y \leq y) = P((X_{CD})^2 \leq y) =$

$$= P(X_{CD} \leq \sqrt{y}) = F_{X_{CD}}(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

5,5 бке

1с

$$F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-e^{-t}, & t\geq 0 \end{cases}$$

$$F_{X_2}(t) = \begin{cases} 0, & t<2 \\ 1, & t\geq 2 \end{cases}$$

$$F_{X_{AB}}(t) = F_{\min\{X_1,X_2\}}(t) = 1-[(1-F_{X_1}(t))(1-F_{X_2}(t))] =$$

$$= \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-e^{-t} & 0\leq t<2 \\ 1 & t\geq 2 \end{cases}$$

$$EX_{AB} = \int_0^2 e^{-t}dt + \int_2^\infty 0\,dt = -e^{-t}\Big|_0^2 = 1-e^{-2}$$

(2

$$F_{X_{CD}}(t) = F_{\max\{X_1,X_2\}}(t) = F_{X_1}(t)\cdot F_{X_2}(t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t<2 \\ 1-e^{-t}, & t\geq 2 \end{cases}$$

$$EX_{CD} = \int_0^\infty [1-F_{X_{CD}}(t)]dt = \int_0^2 1\,dt + \int_2^\infty e^{-t}dt =$$

$$= t\Big|_0^2 + (-e^{-t})\Big|_2^\infty = 2+e^{-2}$$

(2

$$X\geq 2 \Rightarrow y = x^2 \geq 4$$

$$F_Y(y) = P(Y\leq y) = P(X_{CD}^2 \leq y) =$$

$$= P(X_{CD}\leq\sqrt{y}) = F_{X_{CD}}(\sqrt{y}) =$$

$$= \begin{cases} 0, & y<4 \\ 1-e^{-\sqrt{y}}, & y\geq 4 \end{cases}$$