אוניברסיטה בן גוריון בנגב
מדור הבחינות

תאריך הבחינה 22.04.12
שם המורה ל.ברזנסקי, נ.קרפיבניק
מספר הקורס 201.1.131
שם הקורס תורת ההסתברות 1
שנה: תשס"ה; סמסטר:א; מועד:א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפ' נוסחאות מצורפות
מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4 שאלות מתוך 5</u>
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאל

שאלה 1.

נתונה פונקצית צפיפות של מ"מ (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} Cx, & 0<x<y<1 \\ 0, & otherwise \end{cases}.$$

א) מצא C. 5 נ'

ב) מצא $f_X(x)$, $F_x(x)$. 5 נ'

ג) חשב $f_{X|Y}(x|y)$, $E(X|Y=0.5)$ 6 נ'

ד) נסמן $Z=X+Y$. מצא $F_Z(z)$ 9 נ'

שאלה 2.

בכד יש שלושה כדורים: לבן, שחור ואדום. 3 כדורים נבחרו בזה אחר זה עם החזרה. נסמן ב-X את מספר הכדורים בצבע לבן במדגם, ב-Y את מספר הצבעים השונים במדגם.

א) מצא את פונקצית ההסתרות המשותפת $f_{X,Y}(x,y)$. 10 נ'

ב) ידוע, שבסוף הניסוי יש לפחות 2 צבעים שונים. מה ההסתברות שבבחירה הראשונה נבחר כדור לבן. 5 נ'

ג) האם X ו- Y בלתי תלויים ?, בלתי מתואמים? 5 נ'

ד) נסמן $X_1=X+1$, $Y_1=Y-1$. מצא $Cov(X_1,Y_1)$, $f_{X_1,Y_1}(x,y)$. 5 נ'

שאלה 3.

מ"מ X נתון ע"י פונקצית הצפיפות: $-\infty < x < \infty$, $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$. נתון:

$Y = 3X - 2$, $V = \begin{cases} X^5, & -1 \le X \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$.

א) מצא $f_Y(y)$, EY . 13 נ'

ב) מצא $F_V(v)$. 12 נ'

שאלה 4.

אין קשר בין סעיפים.

א) מספר אנשים המגיעים לחנות מתפלג פואסונית עם ממוצע של 3 אנשים בשעה.

(1) מצא הסתברות, שבין שעות 11- 9 יגיעו יותר מ- 3 אנשים. 4 נ'

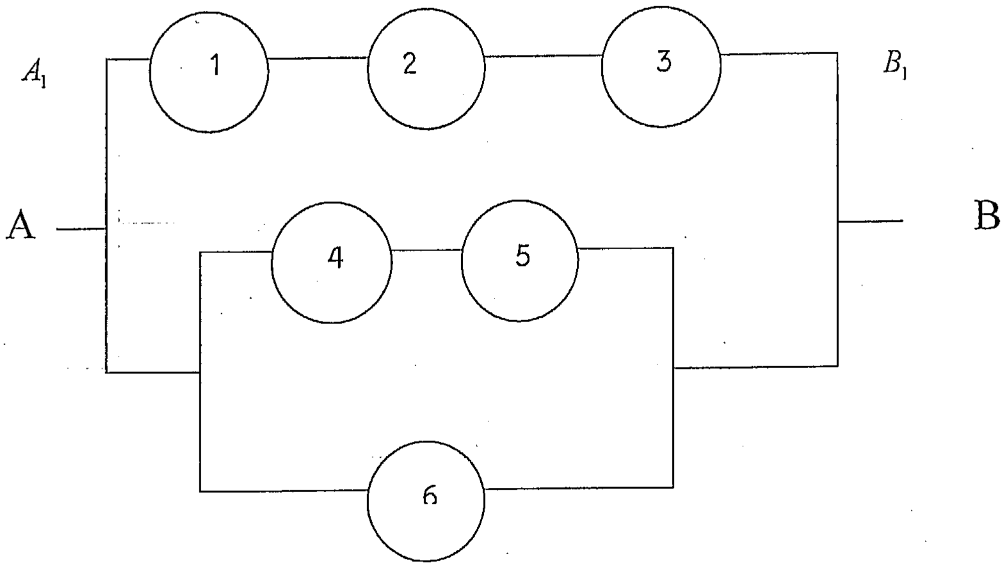
(2) החנות פתוחה מ- 8. מה ההסתברות, שהצרכן השני שיגיע לחנות, יגיע בין שעות 9 ל- 10. 5 נ'

ב) שישה אנשים עומדים בשורה, וביניהם שני מיוחדים. נסמן ב- X את מספר האנשים הנמצאים בין המיוחדים. מצא את פונקצית ההסתברות של X. 8 נ'

ג) מטילים קוביה אינסוף פעמים. נסמן ב-X את מספר הפעמים עד שמקבלים "1" בפעם השלישית, ב-Y את מספר הפעמים עד שמקבלים "1" בפעם השניה. מצא $Cov(X,Y)$. 8 נ'

<u>שאלה 5.</u>

נתונה מערכת אלקטרונית לפי הקונפיגורציה הבאה:



זמן החיים $X_k, k=1,\ldots,6$ של כל האלמנט k מתפלג מעריכית:
$X_i \sim \exp(\lambda)$. כל האלמנטים בלתי תלויים.

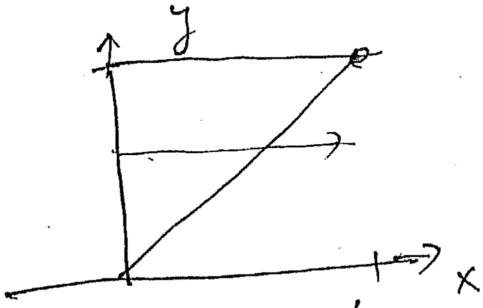
א) מצא $F_{X_{AB}}(t), EX_{AB}$. 9 נ'

ב) חשב $P(X_{AB} < 2 | X_{A_1B_1} > 1)$. 8 נ'

ג) $P(X_{A_1B_1} > X_1 + 1)$? 8 נ'

22.04.12

1 лбке



(а

$$\iint\limits_D f_{x,y}\,dx\,dy = c\int_0^1 dy\int_0^y x\,dx =$$

$$= c\int_0^1 dy\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{c}{2}\int_0^1 y^2\,dy = \frac{c\,y^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{c}{6} = 1$$

$$c = 6$$

(б

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy = 6\int_x^1 x\,dy = 6x(1-x)$$

$$f_x(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{інак} \end{cases}$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt = 6\int_0^x t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 3x^2-2x^3, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

(в

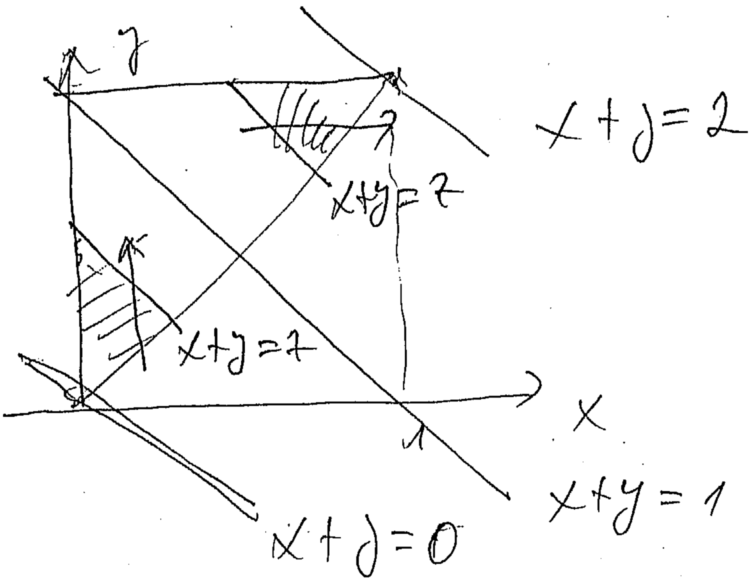
$$f_{x|y}(x,y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}\,dy = 6\int_0^y x\,dx = 3y^2,\ 0\le y\le 1,\ \ 0 \text{ інак}$$

$$f_{x|y}(x|y) = \begin{cases} \frac{6x}{3y^2} = \frac{2x}{y^2}, & 0\le x<y \\ 0, & \text{інак} \end{cases}$$

$$E(X \mid Y=\tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} x \cdot 8x\,dx = \frac{1}{3}$$

(3



1) $0 \le z < 1$ $\quad \begin{cases} x+y=z \\ x=y \end{cases} \quad \begin{matrix} x = z/2 \\ z/2 \end{matrix}$

$$F_Z(z) = 6\int_0^{z/2} dx \int_x^{z-x} x\,dy = 6\int_0^{z/2} x(z-2x)\,dx =$$

$$= 6\left(\frac{zx^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^{z/2} = \frac{1}{4}z^3$$

2) $1 \le z < 2$ $\quad \begin{cases} x+y=z \\ x=y \end{cases} \quad y = z/2$

$$F_Z(z) = 1 - 6\int_{z/2}^{1} dy \int_{z-y}^{y} x\,dx = 1 - 3\int_{z/2}^{1} [y^2 - (z-y)^2]\,dy =$$

$$= 1 - [y^3 - (z-y)^3]\Big|_{z/2}^{1} = \frac{z^3}{4} - (z-1)^3$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{4}z^3, & 0 \le z < 1 \\ \frac{z^3}{4} - (z-1)^3, & 1 \le z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}$$

שאלה 2

(א

$X \backslash Y$	1	2	3	$f_X(x)$
0	2/27	6/27	0	8/27
1	0	6/27	6/27	12/27
2	0	6/27	0	6/27
3	1/27	0	0	1/27
$f_Y(y)$	3/27	18/27	6/27	$\Sigma=1$

ב) נסמן A - הכד השלישי, B - התקבלו 2 כדורים שונים. אז

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(Y\neq 1)}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)}{24/27}=\frac{1}{3}$$

ג) $f_{X,Y}(3,3)=0\neq f_X(3)\cdot f_Y(3) \Rightarrow$ X ו-Y תלויים

$$cov(X,Y)=\frac{12}{27}+\frac{18}{27}+\frac{24}{27}+\frac{3}{27}-\left(\frac{3}{27}+\frac{36}{27}+\frac{18}{27}\right)\left(\frac{12}{27}+\frac{12}{27}+\frac{3}{27}\right)=$$

$$=\frac{57\cdot 27-57\cdot 27}{27^2}=0 \quad \Rightarrow$$ X ו-Y בלתי מתואמים

ד)

$$cov(X+1,Y-1)=cov(X,Y)=0$$

$X_1 \backslash Y_1$	0	1	2	$f_{X_1}(x)$
1	2/27	6/27	0	8/27
2	0	6/27	6/27	12/27
3	0	6/27	0	6/27
4	1/27	0	0	1/27
$f_{Y_1}(y)$	3/27	18/27	6/27	$\Sigma=1$

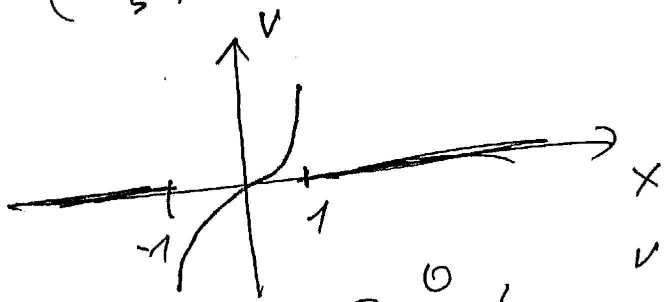
зађке

(c

$$h(y) = \frac{y+2}{3}, \quad f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left(\frac{y+2}{3}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{3}$$

(a



$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < -1 \\ \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \sqrt[5]{v}, & -1 \leq v < 0 \\ \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \sqrt[5]{v}, & 0 \leq v < 1 \\ 0 & v \geq 1 \end{cases}$$

1) $-1 \leq v < 0$ $\quad F_V(v) = \int_{-1}^{\sqrt[5]{v}} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{\sqrt[5]{v}} =$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} \sqrt[5]{v} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \operatorname{arctg} \sqrt[5]{v}$$

2) $0 \leq v < 1$ $\quad F_V(v) = F_V(0-) + P(V=0) + P(0 < V \leq v) =$

$$= \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx\right) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\sqrt[5]{v}} \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt[5]{v} = \frac{3}{4} + \operatorname{arctg} \sqrt[5]{v}$$

שאלה 4

ב

$X \sim P(\mu = 3 \cdot 2 = 6)$

$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-6} \frac{6^k}{k!}$

$P(X>3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-6} \frac{6^k}{k!}$ (1)

(2)

$Y \sim Gamma(\lambda=3, m=2)$

$F_Y(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} =$

$= 1 - e^{-3t}(1+3t)$

$P(1<Y<2) = F_Y(2) - F_Y(1) = 4e^{-3} - 7e^{-6}$

(3

X	0	1	2	3	4	
$f_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\Sigma = 1$

$P(X=0) = \frac{5! \cdot 2}{6!} = \frac{1}{3}$, $P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot 4! \cdot 2}{6!} = \frac{4}{15}$

[illegible] X_1 - מספר הטלות עד הופעה הראשונה של "1"

X_2 - מספר הטלות מהופעה הראשונה עד הופעה שנייה, X_3

מהופעה שנייה עד הופעה שלישית. אז $X_i \sim G(p=\frac{1}{6})$

$Y = X_1 + X_2$, $X = X_1 + X_2 + X_3$

$Cov(X,Y) = Cov(X_1+X_2+X_3, X_1+X_2) =$

$= Cov(X_1, X_1) + \underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{=0} + \dots + Cov(X_2, X_2)$

$= Var(X_1) + Var(X_2) = 2\frac{1-p}{p^2} = 60$

5a δke

$X_{AB} = \max\langle \min\{X_1, X_2, X_3\}, \max\langle \min\{X_4, X_5\}, X_6\rangle$. (б

$F_{X_{AB}}(t) = (1-e^{-3\lambda t})(1-e^{-2\lambda t})(1-e^{-\lambda t}), \quad t \geq 0$

$EX_{AB} = \int_0^\infty [1 - F_{X_{AB}}(t)]dt = \int_0^\infty [e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t} - e^{-5\lambda t} +$

$+ e^{-6\lambda t}]dt = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{73}{60}$

$P(X_{A_1B_1} < 2 \mid X_1 > 1) = 1 - P(X_{A_1B_1} \geq 2 \mid X_1 > 1) =$ (а

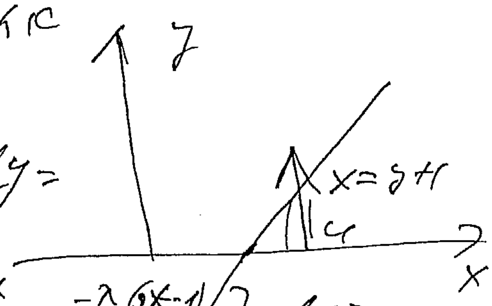
$= 1 - \frac{P(X_{A_1B_1} \geq 2, X_1 > 1)}{P(X_1 > 1)} = 1 - \frac{P(X_{A_1B_1} \geq 2)}{P(X_1 > 1)} = 1 - \frac{e^{-6\lambda}}{e^{-\lambda}} =$

$= 1 - e^{-5\lambda}$

(г

$f_X = e^{-\lambda x}, \; x \geq 0, \quad f_Y = e^{-\lambda y}, \; y \geq 0$

$f_{X,Y} = \begin{cases} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}, & x \geq 0, \; y \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



$P(X > Y+1) = \int_1^\infty dx \int_0^{x-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y} dy =$

$= -\frac{1}{\lambda}\int_1^\infty e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda y}\Big|_0^{x-1} dx = \frac{1}{\lambda}\int_1^\infty [e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(2x-1)}]dx =$

$= \frac{1}{\lambda^2}\left[-e^{-\lambda x} + \frac{1}{2} e^{-\lambda(2x-1)}\right]\Big|_1^\infty =$

$= \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{-\lambda} - \frac{1}{2} e^{-\lambda}\right] = \frac{1}{2\lambda^2} e^{-\lambda}$