אוניברסיטה בן גוריון בנגב
מדור הבחינות

תאריך הבחינה: 09.03.12

שמות המרצים:

ל.ברזנסק,נ.קרפיבניק מספר הקורס 201.1.131

שם הקורס תורת ההסתברות 1

שנה: 2011-12 סמסטר:א; מועד:ב׳

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 3 דפ׳ נוסחאות מצורפות

מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4</u>
<u>שאלות מתוך 5</u>
השאלות שוות בערכן.

<u>שאלה 1.</u>

נתון: $X \sim U(0,1), Y \sim U(0,2)$. מ״מ בלתי תלויים

א) $Z = Y - X$, מצא $F_Z(z)$. 9

ב) מצא $E\left(\frac{X}{Y+1}\right)$. 8

ג) מצא $P(X < Y^2 \mid Y < 2X)$. 8

<u>שאלה 2.</u>

מטילים מטבע 3 פעמים. נסמן: X מספר ״ראשים״ בשתי הטלות הראשונות, Y מספר ״ראשים״ בשתי הטלות אחרונות.

א) מצא $f_{X,Y}(x_k, y_j)$. 10

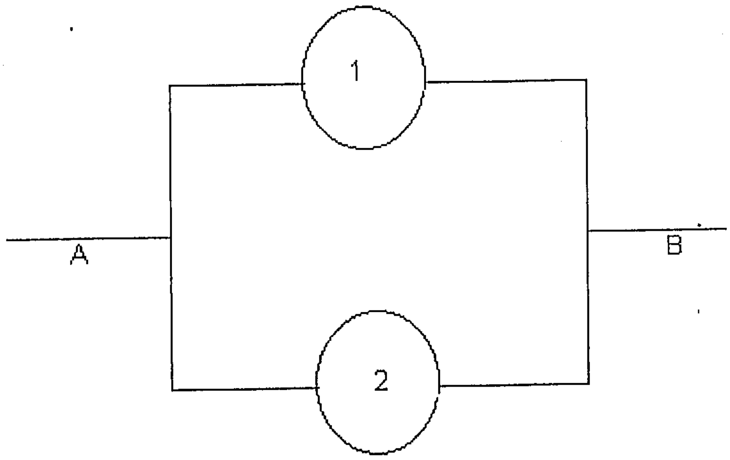
ב) מצא $E(X \mid Y \geq 1)$. 7

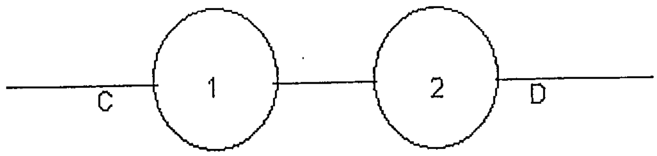
ג) מצא. $\mathrm{Cov}\left(X, \frac{1}{Y+2}\right)$ 8

<u>שאלה 3.</u>

נתון: אלמנט **1** תקין עם הסתברות p_1 , אלמנט **2** תקין עם הסתברות p_2,
אלמנטים בלתי תלויים . אם אלמנט תקין אז אורך חיים מתפלג
$X_i \sim \exp(\lambda_i), i=1,2$.

א) נתון שתי מערכות:





א)מצא

$F_{X_{CD}}(t), E(X_{AB}), F_{X_{AB}}(t)$ 15

ב) מצא $P(X_{AB}>2\,|\,X_1>1)$ 10

<u>שאלה 4.</u>

א) $X\sim U(-2,2)$, $Y=|X^2-1|$, מצא $f_Y(y)$. 10

ב) $U\sim\exp(\lambda=1)$, $V=\begin{cases}(U-1)^2, & U<2\\ 0, & otherwise\end{cases}$, מצא 15

(1) $F_V(v)$,

(2) $P(U>V)$.

שאלה 5.

אין קשר בין סעיפים.

7 א) בכד יש שלושה כדורים המסומנים 1,2,3. בוחרים כדור אחד ונסמן Y המספר בכדור.
נתון $X \sim U(0,k)$ אם $k=1,2,3, Y=k$.
מצא $F_X(x)$.

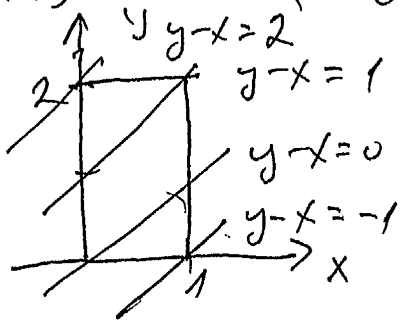
9 ב) מטילים קוביה 5 פעמים. נסמן: X - מספר פעמים שמקבלים 1, Y - מספר פעמים שמקבלים מספר אי-זוגי. מצא מקדם מיתאם $\rho(X,Y)$.

5 ג) מטילים קובייה n פעמים. מצא n מינימאלי כך, שעם הסתברות לא קטנה מ- 0.95 מספר פעמים שמקבלים 1 יהיה לפחות 100.

בהצלחה!

1 ,18 kce

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<-1 \\ \frac{(1+z)^2}{4}, & -1 \le z < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z, & 0 \le z < 1 \\ 1 - \frac{(2-z)^2}{4}, & 1 \le z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

$-1 \le z < 0 \quad F_Z(z) = \iint_{D_z} \frac{1}{2}\,dx\,dy = \frac{1}{2} S(D_z) = \frac{(1+z)^2}{4}$

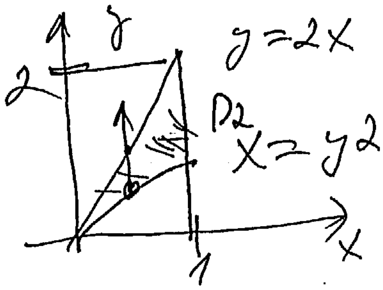
$0 \le z < 1 \quad F_Z(z) = F_Z(0) + \iint_{D_1} \frac{1}{2}\,dx\,dy = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_z^{x+z} dy$

$1 \le z < 2 \quad F_Z(z) = 1 - \iint_{D_2} \frac{1}{2}\,dx\,dy = 1 - \frac{1}{2}\int_0^{2-z} dx \int_{x+z}^{2} dy$

$E\left(\frac{X}{Y+1}\right) = EX \; E\left(\frac{1}{Y+1}\right)$

$EX = \frac{1}{2}, \quad E\left(\frac{1}{Y+1}\right) = \int_0^2 \frac{1}{y+1}\cdot\frac{1}{2}\,dy = \frac{\ln 3}{2}$

$E(X/(Y+1)) = \frac{\ln 3}{4}$



$P(X<Y^2 \mid Y<2X) = \frac{P(X<Y^2,\ Y<2X)}{P(Y<2X)}$

$P(X<Y^2, Y<2X) = \iint_{D_2} \frac{1}{2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2x} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x-\sqrt{x})\,dx = 1/6$

$P(Y<2X) = \frac{1}{2} S(D_3) = \frac{1}{2}$

$\frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

[illegible]

שאלה 2

(ג

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x_i)$
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	1/4	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
$f_Y(y_i)$	1/4	1/2	1/4	1

(ב

$X\mid Y\geq 1$	0	1	2
$f_{X\mid Y\geq 1}(x_i)$	1/6	1/2	1/3

$$f_{X\mid Y\geq 1}(0) = P(X=0\mid Y\geq 1) = \frac{P(X=0,\ Y\geq 1)}{P(Y\geq 1)} = \frac{1/8}{3/4} = 1/6$$

$$f_{X\mid Y\geq 1}(1) = P(X=1\mid Y\geq 1) = \frac{P(X=1,\ Y\geq 1)}{P(Y\geq 1)} = \frac{3/8}{3/4} = 1/2$$

$$f_{X\mid Y\geq 1}(2) = P(X=2\mid Y\geq 1) = \frac{P(X=2,\ Y\geq 1)}{P(Y\geq 1)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$$

$$E(X\mid Y\geq 1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

(ג

[illegible] $\Leftarrow$

$$Cov\left(X, \frac{1}{Y+2}\right) = E\left(\frac{X}{Y+2}\right) - EX\cdot E\left(\frac{1}{Y+2}\right) =$$

$$\cancel{E\left(\frac{X}{Y+2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \cancel{\frac{2}{2}\cdot\frac{0}{8}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{8}$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right) =$$

$$= -0.0313 = -1/32$$

3 שאלה

א) נסמן $X_i, i=1,2$ – זמן חיים של מחשב i. מהו $F_{X_i}(t)$?

$$F_{X_1}(t)=P(X_1\le t)=p_1 P(X_1\le t \mid \text{תקין}) + (1-p_1)P(X_1\le t \mid \text{פגום})$$

$$= p_1(1-e^{-\lambda_1 t}) + (1-p_1)\cdot 1 = 1-p_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad t\ge 0$$

באופן דומה

$$F_{X_2}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-p_2 e^{-\lambda_2 t}, & t>0\end{cases}$$

$$F_{X_{AB}}(t)=\max F_{X_1}(t)\cdot F_{X_2}(t)=$$

$$=\begin{cases}0, & t<0\\ (1-p_1 e^{-\lambda_1 t})(1-p_2 e^{-\lambda_2 t}), & t\ge 0\end{cases}$$

$$E(X_{AB})=\int_0^\infty (1-F_{X_{AB}}(t))\,dt=$$

$$=-\int_0^\infty \left(p_1p_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - p_1 e^{-\lambda_1 t} - p_2 e^{-\lambda_2 t}\right)dt=$$

$$=-\left[-\frac{p_1p_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}+\frac{p_1}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}+\frac{p_2}{\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}\right]_0^\infty=$$

$$=-\frac{p_1p_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{p_1}{\lambda_1}+\frac{p_2}{\lambda_2}$$

$$F_{X_{CD}}(t)=1-(1-F_{X_1}(t))(1-F_{X_2}(t))=$$

$$=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-p_1p_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}, & t\ge 0\end{cases}$$

$$P(X_{AB} > 2 \mid X_1 > 1) =$$

$$= 1 - \frac{P(X_{AB} \leq 2,\ X_1 > 1)}{P(X_1 > 1)} = 1 - \frac{P(X_1 \leq 2,\ X_2 \leq 2,\ X_1 > 1)}{P(X_1 > 1)} =$$

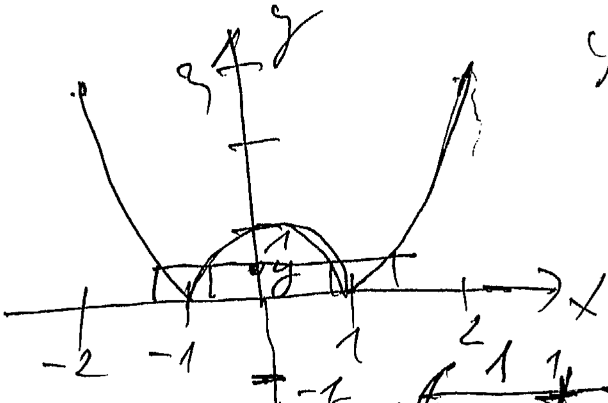
$$= 1 - \frac{P(1 < X_1 \leq 2) \cdot P(X_2 \leq 2)}{P(X_1 > 1)}$$

$$= 1 - \frac{\left(F_{X_1}(2) - F_{X_1}(1)\right) F_{X_2}(2)}{1 - F_{X_1}(1)} =$$

$$= 1 - \frac{\cancel{\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1} - e^{-2\lambda_1}\right)\left(1 - \cancel{\lambda_2} e^{-\lambda_2 \cdot 2}\right)}{\cancel{\lambda_1} e^{-\lambda_1}}$$

4,18 ke

$y = |x^2-1|$ (c)



$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right), & 0<y<1 \\ \frac{1}{4\sqrt{1+y}}, & 1<y<3 \\ 0 & \text{dлк} \end{cases}$$

$x^2-1=y, \quad x = \pm\sqrt{1+y}, \quad 1-x^2=y, \quad x=\pm\sqrt{1-y}$

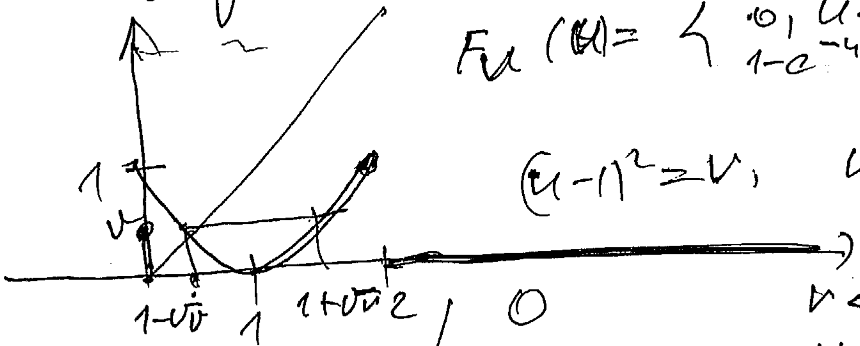
$h_1(y) = -\sqrt{1+y}, \quad h_2(y) = -\sqrt{1-y}, \quad h_3 = \sqrt{1-y}, \quad h_4 = \sqrt{1+y}$

1) $0<y<1$ $\qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2<x<2 \\ 0, & \text{dлк} \end{cases}$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}\, 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y}} + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-y}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right)$$

2) $1<y<3$ $\qquad f_Y(y) = \frac{1}{4} \cdot 2 \, \frac{1}{2\sqrt{1+y}}$

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & u<0 \\ 1-e^{-u}, & u \geq 0 \end{cases}$$ (d)



$(u-1)^2 = v, \quad u = 1 \pm \sqrt{v}$

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & v<0 \\ & 0 \leq v < 1 \\ 1 & v \geq 1 \end{cases}$$ (e)

$0 \leq V < 1 \qquad F_V(v) = P(V=0) + P(0<V\leq v) =$

$= P(U \geq 2) + P(1-\sqrt{v} < U < 1+\sqrt{v}) =$

$= e^{-2} + \left(e^{-(1-\sqrt{v})} - e^{-(1+\sqrt{v})}\right)$

2) $\begin{cases} u = v \\ \cancel{v} = (u-1)^2 \end{cases}$ $\quad \cancel{u} = (u-1)^2$

$u^2 - 3u + 1 = 0$, $\quad u = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $u_0 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$p(u > v) = 1 - p(u \leq v) =$

$= 1 - p(X < u_0) = e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1/3\,x & 0 \le x < 1 \\ 1/2\,x & 1 \le x < 2 \\ 11/18\,x & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

5,18 ke

ke

$$F_X(x) = p(X \le x) = \frac{1}{3}F_{X_1}(x) + \frac{1}{3}\underbrace{F_{X_2}(x)}_{=0} + \frac{1}{3}\underbrace{F_{X_3}(x)}_{=0}$$

1) $0 \le x < 1$

$= \frac{1}{3}x$

$F_X(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{x}{2} = \frac{3}{6}x = 1/2\,x$

2) $\cancel{1 \le x < 2}$

$F_X(x) = \frac{1}{3}\cancel{x} + \frac{1}{3}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\frac{x}{3} \quad \frac{6+3+2}{18}x =$

3) $\cancel{2} \le x\ 3$

$= \frac{11}{18}x$

2

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$X \sim B(n=5, p=1/6)$, $Y \sim B(n=5, p=1/2)$,

$Y-X \sim B(n=5, p=1/3)$

$Var(Y-X) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$

$5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = \frac{\frac{25}{36} + \frac{5}{4} - \frac{10}{9}}{2} = \frac{15}{36}$$

$$\sigma_X = \frac{5}{6},\ \sigma_Y = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{\cancel{15}^{5}/\cancel{36}_{12}}{\frac{5\sqrt{5}}{12}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2

$X_k \sim U(1,2,..6)$ $\quad \cancel{\mu} = E X_k = \frac{7}{2}$ $\quad \sigma_{X_k} = \sqrt{\frac{35}{12}}$

$$p\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} > 100\right) \ge 0.95, \quad p\left(\frac{\sum X_k - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$$

$$1 - \Phi\left(\frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \ge 0.95 \qquad \Phi\left(\frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \le 0.05$$

$$\frac{100-\mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le -1.75$$

$$\underline{n_{min} = 34}$$

5, 16 ке

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{11}{18}x & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{18}x & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{3} + \frac{x}{9} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

1) $0 \le x < 1$ $\quad K = 1, 2, 3$, К ...

$$P(X \le x) = P(A_1)P(X \le x \mid A_1) + P(A_2)P(X \le x \mid A_2) + P(A_3)P(X \le x \mid A_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right] = \frac{11}{18}x$$

2) $1 \le x < 2$

$$P(X \le x) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right] = \frac{1}{3} + \frac{5}{18}x$$

3) $2 \le x < 3$ $\quad P(X \le x) = \frac{1}{3}\left[1 + 1 + \frac{x}{3}\right] = \frac{2}{3} + \frac{x}{9}$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$X \sim B(n=5, p=\frac{1}{6})$, $Y \sim B(n=5, p=\frac{1}{2})$

$Y - X \sim B(n=5, p=\frac{1}{3})$

$Var(Y-X) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = \frac{\frac{25}{36} + \frac{5}{4} - \frac{10}{9}}{2} = \frac{15}{36}, \quad \sigma_X = \frac{5}{6}, \quad \sigma_Y = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$X \sim B(n-?\ p=\frac{1}{6})$, $P(X \geq 100) \geq 0.95$

$P(X < 100) < 0.05$, $\quad P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{100-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) < 0.05$

$\Phi\left(\frac{100-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) < 0.05$, $\quad \frac{600-n}{\sqrt{5n}} < -1.65$

$n + 1.65\sqrt{5}\cdot\sqrt{n} - 600 > 0 \Rightarrow n > 22.7^2 \Rightarrow$

$$n_{min} = \underline{516}$$