תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 3. פתרונות

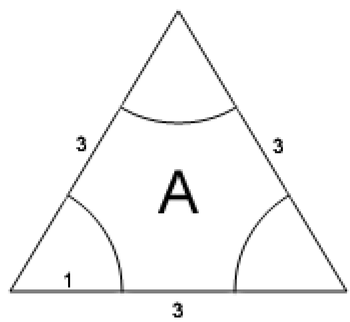
1. Ω - אוסף כל התמורות של $2n$ הנעליים, כאשר מניחים שהנעלים עומדות בשורה ושנעליים 1 ו-2 הן זוג, נעלים 3 ו-4 הן זוג וכו', $|\Omega|=(2n)!$. מרחב ההסתברות סימטרי. (א) A - "לקבל זוגות מקוריים" , $|A|=n!\cdot 2^n$ ($n!$ אפשרויות לסדר את n הזוגות בשורה ו-2 הסידורים האפשריים של כל אחד מהזוגות הנוצרים), $P(A)=\frac{n!\cdot 2^n}{(2n)!}$. (ב)

B - "בכל זוג יש נעל שמאלית ונעל ימנית", $|B|=n!\cdot n!\cdot 2^n$ ($n!$ אפשרויות לסדר את הנעליים השמאליות במקומות 1, 3, ... ; $n!$ אפשרויות לסדר את הנעליים הימניות במקומות 2, 4, ... ; ו-2 סידורים אפשריים של כל אחד מהזוגות הנוצרים) $P(B)=\frac{(n!)^2\cdot 2^n}{(2n)!}$.

הערה: ניתן לפתור את שאלה בדרכים אחרות, כאשר משתמשים בתיאור הניסוי אחר (מרחב המדגם Ω אחר).

2. מרחב המדגם Ω הוא קבוצת כל הנקודות ω במשולש שווה-צלעות. מרחב ההסתברות גיאומטרי. A - "המרחק מנקודה ω ($\omega\in\Omega$) לקודקוד כלשהו של Ω גדול מ-1". $P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=1-\frac{\pi/2}{9\sqrt{3}/4}\approx 0.6$

($S(A)$ - שטח של A)

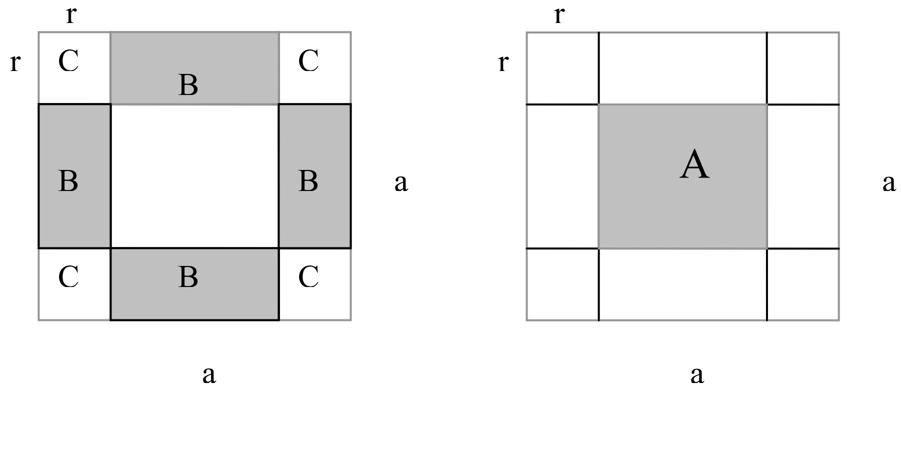


3. מרחב המדגם Ω - ריבוע בעל צלע a , ω - מרכז המטבע ($\omega\in\Omega$). מרחב ההסתברות גיאומטרי.

(א) "מטבע יהיה כולו בתוך תא אחד" $\Leftrightarrow$ מרכז המטבע בתחום A . $P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{(a-2r)^2}{a^2}$.

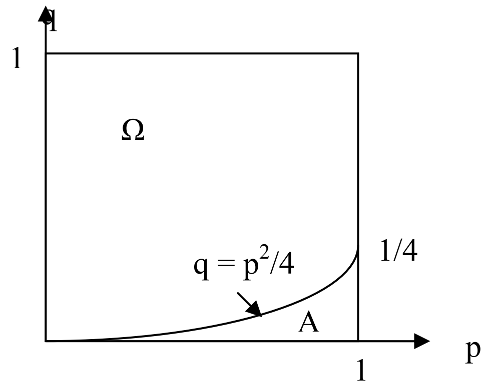
(ב) "מטבע יחתוך בדיוק אחת מהצלעות" $\Leftrightarrow$ מרכז המטבע בתחום B , $P(B)=\frac{4(a-2r)r}{a^2}$.

(ג) "מטבע יחתוך לפחות שתי צלעות" $\Leftrightarrow$ מרכז המטבע באחד מארבעה ריבועים C , $P(C)=\frac{4r^2}{a^2}$.



4. $\Omega=\{\omega=(p,q)\,|\,0\le p,q\le 1\}$**,** מרחב ההסתברות גיאומטרי. "שני השורשים של המשוואה הם ממשיים"
$\Leftrightarrow$ זוג המקדמים $\omega=(p,q)$ נבחר בתחום $A=\{\omega=(p,q)\in\Omega\,|\,p^2-4q\ge 0\}$.

$A=\{(p,q)\in\Omega\,|\,q\le p^2/4\}$, $P(A)=S(A)=\int_0^1\frac{p^2}{4}dp=\frac{p^3}{12}\Big|_0^1=\frac{1}{12}$.



מאורעות בלתי תלויים

<u>**הגדרה:**</u> נאמר ששני מאורעות A ו-B בלתי תלויים אם $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

<u>**משפט:**</u> אם A ו-B בלתי תלויים, אז $P(A/B)=P(A)$ ו- $P(B/A)=P(B)$.

<u>**משפט:**</u> אם A ו-B בלתי תלויים, אז כל אחד מהזוגות A ו-$\overline{B}$, $\overline{A}$ ו-B, $\overline{A}$ ו-$\overline{B}$ גם בלתי תלויים.

6. (א) $0.7=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)==0.5+P(B)(1-0.5)$
מכאן $P(B)=0.4$. (ב) $0.7=P(A\cup B)=P(A)+P(B)==0.5+P(B)$ $\Leftarrow$ $P(B)=0.2$

8. מרחב המדגם Ω - אוסף כל האנשים במדינה. יהיו A - " נבחר בן אדם אנאלפביתי" , B_1 - " נבחר גבר" ,
B_2 - " נבחרה אישה". (א)מאורעות B_1 ו- B_2 יוצרים חלוקת המרחב Ω (B_1 ו- B_2 זרים ו- $\Omega=B_1\cup B_2$).
לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה $P(A)=P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)=0.05\cdot\frac{1}{2}+0.12\cdot\frac{1}{2}=0.085$.

(ב) לפי נוסחת בייז $P(B_1/A)=\frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.05\cdot 0.5}{0.085}\approx 0.294$.

9. Ω - אוסף כל הסדרות הסדורות של 7 הכדורים בלי חזרה המסתיימות בכדור לבן. יהיו A_i -"הכדור ה-i-י בסדרה לבן", B_i -"הכדור ה-i-י שחור" , C - " שחקן המתחיל את המשחק יזכה".
המאורע C הוא האיחוד של שלושה מאורעות זרים: $C=A_1\cup(B_1\cap B_2\cap A_3)\cup(B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4\cap A_5)$.
לכן $P(C)=P(A_1)+P(B_1\cap B_2\cap A_3)+P(B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4\cap A_5)$. $P(A_1)=\frac{3}{7}$**,** לפי הנוסחה לחישוב
הסתברות של חיתוך מאורעות $P(B_1\cap B_2\cap A_3)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P(A_3/B_1\cap B_2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$,

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4\cap A_5)=$$

$$=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)\cdot P(B_3/B_1\cap B_2)\cdot P(B_4/B_1\cap B_2\cap B_3)\cdot P(A_5/B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$$

לכן $P(C)=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{22}{35}$.

10. יהי A_i - " המפסק ה-i-י בחוליה הראשונה דלוק" , A - "יש מוליכות בחוליה הראשונה". ברור כי $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ לכן $P(A)=1-P(\overline{A})=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)$. מאי-תלות של המאורעות $A_1,A_2,...,A_n$ נובע כי $P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})=\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))=(1-p)^n$. מכאן $P(A)=1-(1-p)^n$. יהיו B - "יש מוליכות בחוליה השנייה", C - "יש מוליכות בחוליה השלישית" , D - "יש מוליכות במעגל", אז $D=A\cap B\cap C$. מאי-תלות של המאורעות A,B,C נקבל $P(D)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=P(A)^3=[1-(1-p)^n]^3$.

11. יהי A -"לא וישתנה מספר האנשים באוטובוס". A הוא האיחוד של מאורעות זרים: B - "אף אחד לא יורד וגם אף אחד לא עולה" ו- C - "אחד יורד ואחד עולה" . משתמשים באי-תלות של פעולות הנוסעים ומקבלים:

$P(B)=(1-p_0)^n\cdot p_1$, $P(C)=\binom{n}{1}p_0\cdot(1-p_0)^{n-1}\cdot(1-p_1)$. ולכן

$P(A)=p_1(1-p_0)^n+np_0(1-p_0)^{n-1}(1-p_1)$.

12. $\Omega=\{\omega=(j_1,j_2,j_3)\,|\,j_1,j_2,j_3\in\{1,2,...,6\}\}$ - מרחב המדגם , P - ההסתברות סימטרית.
יהיו A,B מאורעות הבאים: A - "לפחות על אחת מהקוביות יופיע מספר 1", B-"על כל שלוש הקוביות הופיעו מספרים שונים".

$$P(A/B)=1-P(\overline{A}/B)=1-\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=1-\frac{|\overline{A}\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}=1-\frac{|\overline{A}\cap B|}{|B|}$$

ברור כי $|B|=(6)_3=6\cdot5\cdot4$. $\overline{A}\cap B$ - "על כל שלוש הקוביות יופיעו מספרים שונים מ-2 עד ל-6" ולכן $|\overline{A}\cap B|=(5)_3=5\cdot4\cdot3$, ו- $P(A/B)=1-\frac{(5)_3}{(6)_3}=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.