

תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 4. פתרונות

$$1. \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) \quad \text{ולפי חוק דה-מורגן, } \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}, \text{ לכן}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) \quad \text{המאורעות } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ בלתי תלויים} \Leftrightarrow \text{(משפט)}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\overline{A_i}) \quad \text{לכן } \overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n} \text{ גם בלתי תלויים,}$$

$$2. \quad A = \text{"ביום מסוים ירד גשם"}, \quad P(A) = p, \quad B = \text{"סטודנט מחליט לקחת מטרייה"}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{לכן } C = A \cap B$$

"הוא לא יירטב", $\overline{C} = A \cap \overline{B}$, "הוא יירטב", $\overline{C} = A \cap \overline{B}$. ברור כי A ו- B בלתי תלויים $\Leftrightarrow A$ ו- \overline{B} בלתי תלויים,

$$\text{לכן } P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A \cap \overline{B}) = 1 - P(A)P(\overline{B}) = 1 - p \cdot \frac{2}{3}$$

3. $A_i = \text{"קיבלנו מספר } i \text{ בהטלת הקובייה"}, i = 1, 2, \dots, 6$. המאורות $A_i, i = 1, 2, \dots, 6$, הם יוצרים חלוקת

מרחב המדגם (הם זרים בזוגות והאיחוד שלהם הוא כל מרחב המדגם). לכן, אם נסמן $B = \text{"לקבל בדיוק שני "עצים" בהטלות המטבע"}, \text{ לפי נוסחת ההסתברות השלמה}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^6 P(B/A_i) \cdot P(A_i) = 0 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6} + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{6} + \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{33}{128}$$

4. $A = \text{"בתוך הקבוצה יש לפחות שלושה אנשים שנולדו במרץ"}, B = \text{"איש אחד לפחות מהקבוצה נולד במרץ"}$

$$P(\overline{A}) = \binom{11}{12}^{20} + \binom{20}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^{19} + \binom{20}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^{18} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1 - P(\overline{A})}{1 - P(B)}$$

$$P(A/B) = \frac{1 - P(\overline{A})}{1 - P(B)} \approx 0.279 \quad P(\overline{B}) = \left(\frac{11}{12}\right)^{20}$$

5. $A_i = \text{"בוחרים בקובייה מספר } i"}, i = 1, 2$. המאורות $A_i, i = 1, 2$, הם יוצרים חלוקת מרחב המדגם. $B = \text{"קבלנו צבע אדום פעמיים"}$. לפי נוסחת בייז

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)} = \frac{(2/6)^2(1/2)}{(2/6)^2(1/2) + (4/6)^2(1/2)} = 0.2$$

$$7. \quad \sum_{x=1}^4 f_X(x) = 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1 \quad \text{א) } f_X(x) = (5-x)/10 \geq 0 \quad \text{לכל } x = 1, 2, 3, 4 \quad \text{ב) } P(-2 \leq X \leq 2) = P(1) + P(2) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

$$P(X \leq t) = F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 0.4, & 1 \leq t < 2 \\ 0.7, & 2 \leq t < 3 \\ 0.9, & 3 \leq t < 4 \\ 1, & 4 \leq t \end{cases} \quad \text{ג)}$$

8. הערכים האפשריים של x_i של מ"מ בדיד X הם נקודות הקפיצה ($t = x_i$) של פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$, לכן הערכים האפשריים של מ"מ X הם $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$. גובה המדרגה (או הקפיצה) בכל אחד

מהערכים $x_i = 0, 1, 2, 3, 4$ שווה בערכו להסתברות $f_X(x_i) = P(X = x_i)$ ולכן

x_i	0	1	2	3	4
$f_X(x_i)$	1/8	1/4	3/8	1/8	1/8

10. נקרא קבלת תוצאה זוגית בהטלת קובייה אחת ל-"הצלחה". נסמן ב- X מספר ההטלות עד להצלחה רביעית.

X - מ"מ בינומי שלילי עם הפרמטרים $m = 4, p = \frac{1}{2}$, ולכן $X \sim NB\left(4, \frac{1}{2}\right)$

$$P(X = 6) = \binom{6-1}{4-1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-4} = 0.15625 \quad (\text{א}) \quad P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad k = 4, 5, \dots$$

$$P(X < 8) = \sum_{k=4}^7 P(X = k) = \sum_{k=4}^7 \binom{k-1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 0.5 \quad (\text{ב})$$

11. X - מ"מ היפר-גיאומטרי עם הפרמטרים $N = 8, D = 3, n = 5$, ולכן לכל $k = 0, 1, 2, 3$

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{5}{5-k}}{\binom{8}{n}}$$

k	0	1	2	3
$f_X(k)$	1/56	15/56	30/56	10/56

12. (א) מספר הטלות X עד אשר יתקבל "עץ" בפעם ה- m הוא מ"מ בינומי שלילי עם הפרמטרים $p = \frac{1}{2}$ ו- m

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} = \binom{k-1}{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{ולכן } X \sim NB\left(m, \frac{1}{2}\right) \quad k = m, m+1, \dots$$

$$f_X(k) = P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \quad \text{ולכן } X \sim NB(m, p) \quad \text{עבור } k = m, m+1, \dots \quad (\text{ב})$$