תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 5 פתרונות

1. נסמן ב - X את מספר הוצאות הכדור הנדרשות עד לקבלת כדור שחור בפעם הראשונה. X - מ"מ גיאומטרי עם הפרמטר $p=\dfrac{M}{M+N}$ לכן (א) $P\{X=n\}=(1-p)^{n-1}p=\left(\dfrac{N}{M+N}\right)^{n-1}\dfrac{M}{M+N}=\dfrac{M\cdot N^{n-1}}{(M+N)^n}$.

(ב) $P\{X\ge k\}=(1-p)^{k-1}=\left(\dfrac{N}{M+N}\right)^{k-1}$. (ג) נסמן ב- P את ההסתברות ש- X הוא מספר זוגי, אז

$P=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=2n\}=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{2n-1}p=p\dfrac{1-p}{1-(1-p)^2}$ (לפי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית).

נציב $p=\dfrac{M}{M+N}$ ונקבל $P=\dfrac{N}{M+2N}$.

3. בתנאי שמספר אנשים X הפונים ללשכת המידע שווה ל- k, מספר האנשים Y המקבלים תשובה שגויה מתפלג בינומית עם הפרמטרים k ו- q. לפי נוסחת ההסתברות השלמה, עבור $s=0,1,2,...$ נקבל

$$f_Y(s)=P\{Y=s\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{Y=s/X=k\}P\{X=k\}=\sum_{k=s}^{\infty}P\{Y=s/X=k\}\cdot P\{X=k\}=$$

$$=\sum_{k=s}^{\infty}\binom{k}{s}p^{k-s}q^s\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=s}^{\infty}\frac{k!}{(k-s)!s!}p^{k-s}q^s\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{e^{-\lambda}q^s}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}\frac{p^{k-s}\lambda^k}{(k-s)!}=\frac{e^{-\lambda}q^s\lambda^s}{s!}\sum_{k=s}^{\infty}\frac{p^{k-s}\lambda^{k-s}}{(k-s)!}=$$

$$\underset{(n=k-s)}{=}\frac{e^{-\lambda}(\lambda q)^s}{s!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda p)^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda q)^s}{s!}e^{\lambda p}=e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda q)^s}{s!}=e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^s}{s!}$$

כלומר, Y - מ"מ פואסוני עם הפרמטר λq.

4. ממוצע חלקיקי α בשנייה הינו $\lambda=\dfrac{2500}{10000}=\dfrac{1}{4}$, ממוצע חלקיקי α ב-10 שניות הינו $\mu=\lambda\cdot 10=\dfrac{10}{4}=2.5$. מספר X חלקיקי α ב-10 שניות הוא מ"מ פואסוני עם הפרמטר $\mu=2.5$

$(X\sim P(2.5))$ לכן $P\{X\ge 3\}=1-P\{X<3\}=1-\sum_{k=0}^{2}e^{-2.5}\dfrac{(2.5)^k}{k!}=0.456$.

5. (א) $1=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_2^8 k(x+3)dx=k(x^2/2+3x)\Big|_3^8=48k \Rightarrow k=1/48$.

(ב) $P(3<X<5)=\int_3^5 f(x)dx=\int_3^5\dfrac{(x+3)}{48}dx=\dfrac{7}{24}$

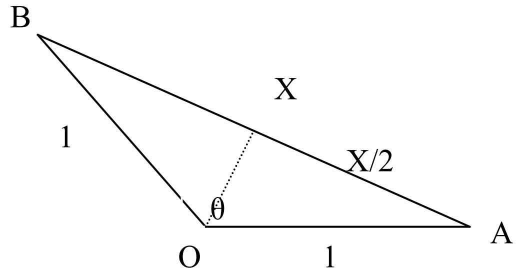
7. פונקציה $f(x)=a|x|e^{-x^2}$ זוגית לכן $1=\int_{-\infty}^{\infty}a|x|e^{-x^2}dx=2a\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx=a(-e^{-x^2})\Big|_0^{\infty}=a$.

8. $X\sim Exp(\lambda)$, $\lambda=1/1000 \Rightarrow$ (א) $F_X(t)=P\{X\le t\}=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-t/1000}$ עבור $t\ge 0$ ו- $F_X(t)=0$ עבור $t<0$. (ב) $P\{800\le X\le 1200\}=F_X(1000)-F_X(800)=e^{-800/1000}-e^{-1200/1000}\approx 0.148$.

10. A - הנקודה הראשונה הקבועה, B - נקודה שנייה המפולגת באופן אחיד במעגל יחידה. ערך הזווית θ הוא משתנה מקרי אחיד בקטע $[-\pi,\pi]$, $\theta \sim U(-\pi,\pi)$. $X=|AB|$, $X=2\sin\frac{|\theta|}{2} \Leftarrow \frac{X}{2}=\sin\frac{|\theta|}{2}$. ברור ש- $X\in[0.2]$, לכן לכל $t<0$ $F_X(t)=P\{X\le t\}=0$ ולכל $t\ge 2$ $F_X(t)=P\{X\le t\}=1$. עבור $t\in[0,2]$ נקבל

$$F_X(t)=P\{X\le t\}=P\left\{2\sin\frac{|\theta|}{2}\le t\right\}=P\left\{\sin\frac{|\theta|}{2}\le\frac{t}{2}\right\}=P\left\{\frac{|\theta|}{2}\le\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right\}=$$

$$=P\left\{|\theta|\le 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right\}=P\left\{-2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\le\theta\le 2\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)\right\}=\frac{4\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)$$



ובכן $F_X(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{t}{2}\right), & 0\le t<2\\ 1, & t\ge 2\end{cases}$.פונקצית ההתפלגות המצטברת $F_X(t)$ **רציפה על כל הישר וגזירה במקוטעים ולכן** $f_X(x)=F'_X(x)$ - פונקצית הצפיפות של X : $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2/4}}, & x\in[0,2]\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$.

11 יהי X_i אורך (בשעות) חיי המנוע ה-i-י , $i=1,2,...,M$, $X_i\sim Exp(\lambda)$. אם $A=$" אף מנוע לא יתקלקל במשך $1/\lambda$ שעות", אז $P(A)=P(\{X_1>1/\lambda\}\cap\{X_2>1/\lambda\}\cap...\cap\{X_2>1/M\})$. מניחים שהמנועים עובדים ללא תלות אחד בשני ולכן המאורעות $\{X_1>1/\lambda\},\{X_2>1/\lambda\},...,\{X_2>1/M\}$ בלתי-תלויים. מכאן

$P(\{X_1>1/\lambda\}\cap\{X_2>1/\lambda\}\cap...\cap\{X_2>1/M\})=P(X_1>1/\lambda)\cdot P(X_2>1/\lambda)\cdot...\cdot P(X_M>1/\lambda)$.

$P(X_i>t)=e^{-\lambda t} \Leftarrow X_i\sim Exp(\lambda)$, מציבים $t=1/\lambda$ ומקבלים $P(X_i>1/\lambda)=e^{-1}$ ו- $P(A)=\left(e^{-1}\right)^M=e^{-M}$.

12 יהיו H_1,H_2,H_3 מאורעות הבאים: H_1 - "מוצר הנבחר הוא מהמכונה A", H_2 - "מוצר הנבחר הוא מהמכונה B" , H_3 - "מוצר הנבחר הוא מהמכונה C" , E - "מוצר הנבחר הוא פגום". (א) לפי נוסחת ההסברות השלמה

$$P(E)=P(E/H_1)P(H_1)+P(E/H_2)P(H_2)+P(E/H_3)P(H_3)=\frac{4}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{7}{100}\cdot\frac{60}{100}+\frac{5}{100}\cdot\frac{30}{100}=$$
$$=0.061$$

(ב) לפי נוסחת בייז $P(H_1/E)=\frac{P(H_1)P(E/H_1)}{P(E)}=\frac{0.1\cdot 0.04}{0.061}=\frac{4}{61}$.

(ג) $P(\overline{H_3}/E)=1-P(H_3/E)=1-\frac{P(H_3)P(E/H_3)}{P(E)}=1-\frac{0.3\cdot 0.05}{0.061}=\frac{46}{61}$.