תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 6. פתרונות

1. (א) $P\{X \le C\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{C-\mu}{\sigma}\right\} = P\left\{Z \le \frac{C-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\right) = 0.9$, כאשר $Z \sim N(0,1)$.

מטבלת ההתפלגות המצטברת $\Phi(t)$ נקבל $\Phi(1.282) = 0.9$ ומכאן $\frac{C-\mu}{\sigma} = 1.282 \Leftarrow C = \mu + 1.282\sigma$.

(ב)

$$P\{|X-\mu| \le C\} = P\{-C \le X-\mu \le C\} = P\left\{-\frac{C}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{C}{\sigma}\right\} = P\left\{-\frac{C}{\sigma} < Z \le \frac{C}{\sigma}\right\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{C}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) - 1 = 0.9$$

(השתמשנו בתכונה: $\Phi(-t) = 1-\Phi(t)$). מכאן $\Phi\left(\frac{C}{\sigma}\right) = \frac{1.9}{2} = 0.95 \Rightarrow \frac{C}{\sigma} = 1.645 \Rightarrow C = 1.645\sigma$

(ג)

$$P\{9 < X < 12\} = P\left\{\frac{9-10}{6} < \frac{X-10}{6} < \frac{12-10}{6}\right\} = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{6}\right) =$$

$$= 0.6293 - (1-0.5675) = 0.1968$$

2. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{0.1}\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 0.1}}$ - פונקצית הצפיפות של מ"מ X. ברור כי $0.95 \le Y \le 1.05$ ולכן, אם קיימת פונקצית צפיפות $f_Y(y)$ של מ"מ Y, יתקיים $f_Y(y) = 0$ עבור $y \notin [0.95,1.05]$. נמצא את פונקצית ההתפלגות $F_Y(t) = P\{Y \le t\}$ של מ"מ Y: $F_Y(t) = 0$ לכל $t < 0.95$, $F_Y(t) = 1$ לכל $t \ge 1.05$, ועבור $0.95 \le t < 1.05$

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(X \le t / 0.95 \le X \le 1.05) = \frac{P(\{X \le t\} \cap \{0.95 \le X \le 1.05\})}{P(0.95 \le X \le 1.05)} =$$

$$\frac{P(0.95 \le X \le t)}{P(0.95 \le X \le 1.05)} = \frac{\int_{0.95}^{t} f_X(x)dx}{P(0.95 \le X \le 1.05)} = \int_{0.95}^{t} \frac{f_X(x)}{P(0.95 \le X \le 1.05)} dx$$

מכאן, לפי הגדרת פונקצית הצפיפות, נקבל: $f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{P(0.95 \le X \le 1.05)}$ עבור $y \in [0.95,1.05]$ ו- $f_Y(y) = 0$ עבור $y \notin [0.95,1.05]$.

$$P(0.95 \le X \le 1.05) = P\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}} \le \frac{X-1}{\sqrt{0.1}} \le \frac{1.05-1}{\sqrt{0.1}}\right) = \Phi\left(\frac{1.05-1}{\sqrt{0.1}}\right) - \Phi\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{0.1}}\right) = 0.1256$$ ולכן

$f_Y(y) = \frac{1}{0.1256\cdot\sqrt{0.1}\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\cdot 0.1}} = \frac{25.19}{\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{\cdot 0.2}}$ עבור $y \in [0.95,1.05]$.

4. Y הוא מ"מ בדיד המקבל את שני ערכים: 1 ו- (-1), כי משום ש- X מ"מ רציף $P(Y=0) = P(X=0) = 0$.

$P(Y=1)=P(X>0)=\int_0^\infty f_X(x)dx$, $P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-\infty}^0 f(x)dx$. לפונקציית ההתפלגות המצטברת $F_Y(t)$ של מ"מ בדיד Y יש שתי קפיצות: בנקודה $t=-1$ הקפיצה בגודל $P(Y=-1)$ ובנקודה $t=1$ הקפיצה בגודל $P(Y=1)=1-P(Y=-1)$, לכן $F_Y(t)=\begin{cases}0, & t<-1\\ \int_{-\infty}^0 f(x)dx, & -1\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$.

7. הערכים האפשריים של מ"מ X נמצאים בקטע $[0,\infty)$. פונקציה $y=g(x)=x^2$ כאשר $x\in[0,\infty)$ עולה ממש מקבלת כל ערכים בקטע $[0,\infty)$ ויש לה פונקציה הפוכה - $x=h(y)=g^{-1}(y)=\sqrt{y}$ המוגדרת לכל $y\in[0,\infty)$.
לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה $Y=g(X)=X$ של מ"מ X

$f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|=2\sqrt{y}e^{-(\sqrt{y})^2}\cdot|(\sqrt{y})'|=e^{-y}$, עבור $y\notin[0,\infty)$ $f_Y(y)=0$.

($Y\sim Exp(1)$)

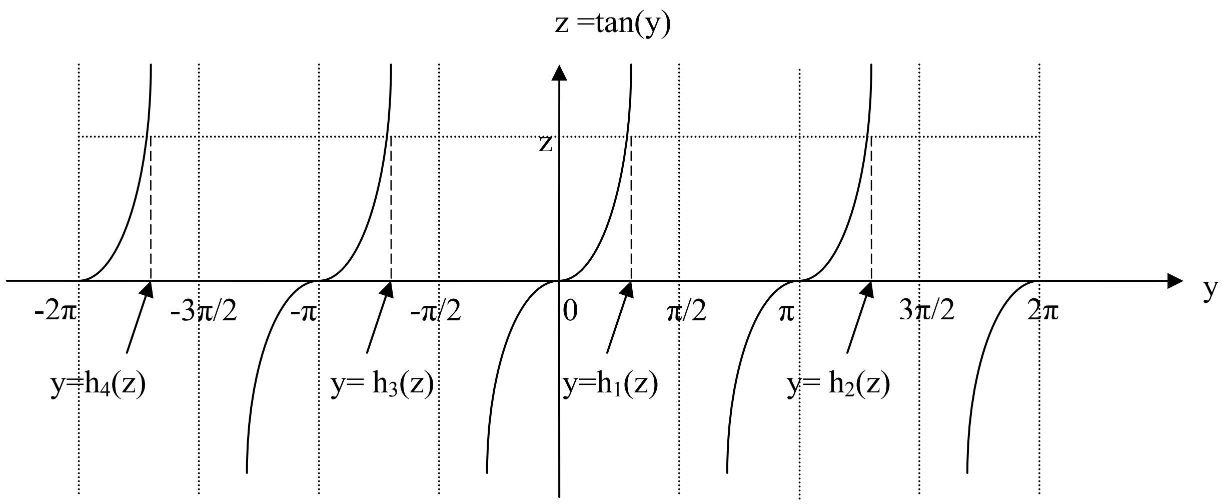
8. (א) $f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$, הערכים האפשריים של מ"מ X נמצאים בקטע $[0,1]$.

$y=g(x)=4\pi(x-0.5)$, $g:[0,1]\to[-2\pi,2\pi]$, g עולה ממש. $x=\frac{y}{4\pi}+0.5\Leftarrow y=4\pi(x-0.5)$ לכן $x=h(y)=g^{-1}(y)=\frac{y}{4\pi}+0.5$. לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה של מ"מ, עבור כל $y\in[-2\pi,2\pi]$ $f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|=1\cdot|(\sqrt{y})'|=1\cdot\frac{1}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}$, ו- $f_Y(y)=0$ עבור $y\notin[-2\pi,2\pi]$. כלומר $Y\sim U(-2\pi,2\pi)$.

(ב) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\pi}, & y\in[-2\pi,-2\pi]\\ 0, & y\notin[-2\pi,-2\pi]\end{cases}$, הערכים האפשריים של מ"מ Y נמצאים בקטע $[-2\pi,2\pi]$.

$z=g(y)=\tan y\ (=tg(x))$, $g:[-2\pi,2\pi]\to(-\infty,\infty)$, g עולה ממש למקוטעין: ב-5 קטעים $\left(-2\pi,-\frac{3\pi}{2}\right),\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right),\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right),\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ בנפרד. לכל $z\ge0$ $z=g(y)=\tan y\Leftarrow$

$y=h_1(z)=\arctan z$, $y=h_2(z)=\arctan z+\pi$, $y=h_3(z)=\arctan z-\pi$, $y=h_4(z)=\arctan z-2\pi$.



לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה של מ"מ

עבור $t \geq 0$ $\quad f_Z(z) = \sum_{i=1}^{4} f_Y(h_i(z)) \cdot |h_i'(z)| = 4 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2}$.

באופן דומה, עבור $z < 0$ $\quad z = g(y) = \tan y \Leftarrow$

$y = h_1(z) = \arctan z$, $y = h_2(z) = \arctan z + \pi$, $y = h_3(z) = \arctan z - \pi$, $y = \widetilde{h}_4(z) = \arctan z + 2\pi$.

נקבל $f_Z(z) = 4 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2}$. מקבלים $\quad f_Z(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$ $\quad$ עבור כל z ממשי.

(ג) $X \in [0,1]$ בהסתברות 1. $y = g(x) = a + bx$. נתבונן בשלושה מקרים:

(1) $b > 0$: g עולה ממש, $g : [0,1] \to [a, a+b]$. $y = a + bx \Rightarrow x = \frac{y-a}{b}$ ולכן

$x = h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$. לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה של מ"מ, $\quad$ עבור $y \in [a, a+b]$

$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{1}{b}$ ו- $f_Y(y) = 0$ עבור $y \notin [a, a+b]$. כלומר $Y \sim U(a, a+b)$.

(2) $b < 0$: g יורדת ממש, $g : [0,1] \to [a+b, a]$. $y = a + bx \Rightarrow x = \frac{y-a}{b}$ ולכן

$x = h(y) = g^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$. לפי המשפט על הצפיפות של טרנספורמציה של מ"מ, $\quad$ עבור $y \in [a+b, a]$

$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)| = 1 \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{1}{|b|}$, ו- $f_Y(y) = 0$ עבור $y \notin [a+b, a]$. כלומר $Y \sim U(a+b, a)$.

(3) $b = 0$, $W \equiv a$ - מ"מ בדיד (קבוע) ופונקציית צפיפות שלו אינה קיימת.

9. $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow$ עבור $t \geq 0$ $\quad F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow$

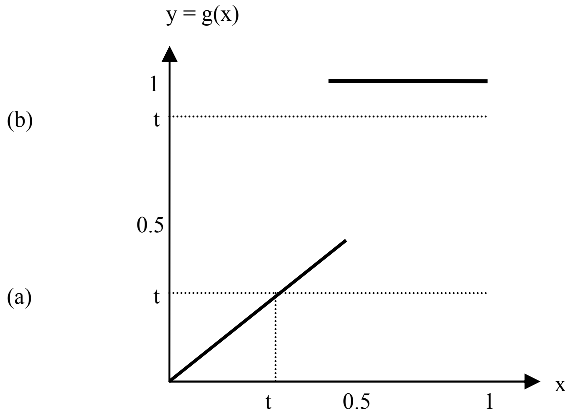
עבור $0 \leq a \leq b$ $\quad P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

$$P(\sin X > 0) = P(0 < X < \pi) + P(2\pi < X < 3\pi) + P(4\pi < X < 5\pi) + \ldots =$$

$$= (1 - e^{-\pi\lambda}) + (e^{-2\pi\lambda} - e^{-3\pi\lambda}) + (e^{-4\pi\lambda} - e^{-5\pi\lambda}) + \ldots = (1 + e^{-2\pi\lambda} + e^{-4\pi\lambda} + \ldots) - (e^{-\pi\lambda} + e^{-3\pi\lambda} + e^{-5\pi\lambda} + \ldots) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi\lambda}\right)^k - e^{-\pi\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2\pi\lambda}\right)^k = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\lambda}} - \frac{e^{-\pi\lambda}}{1 - e^{-2\pi\lambda}} = \frac{1}{1 + e^{-\pi\lambda}}$$

10. $X \sim U(0,1)$, $\quad Y = g(X) = \begin{cases} X, & X \in [0, 0.5) \\ 1, & X \in [0.5, 1] \end{cases}$



(a) כאשר $0 \leq t \leq 0.5$, $\quad F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X \leq t) = t$.

(b) כאשר $0.5 < t \le 1$, $F_Y(t) = P(Y \le t) = P(X \le 0.5) = 0.5$.

ברור כי לכל $t < 0$ $F_Y(t) = 0$, ולכל $t \ge 1$ $F_Y(t) = 1$, לכן
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t < 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$$

11. יהיו X זמן ההמתנה ברמזור, מאורע A ="הרמזור מראה ירוק" , $\bar{A}$ ="הרמזור מראה אדום". $P(A) = 1/2$.

בתני שהרמזור מראה ירוק $X \equiv 0$ לכן $F_{X/A}(t) = P(X \le t/A) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \le t \end{cases}$.

בתני שהרמזור מראה אדום $X \sim U(0,1)$ ולכן $F_{X/\bar{A}}(t) = P(X \le t/\bar{A}) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t \end{cases}$

לפי נוסחת ההסתברות השלמה
$$F_X(t) = P(X \le t) = P(X \le t/A)P(A) + P(X \le t/\bar{A})P(\bar{A}) =$$
$$= F_{X/A}(t)\cdot\frac{1}{2} + F_{X/\bar{A}}(t)\cdot\frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1\cdot\frac{1}{2} + t\cdot\frac{1}{2}, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t+1}{2}, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t \end{cases}$$

12. $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ עבור $t \ge 0$ $\Leftarrow$ $0 \le a \le b$ $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

הערכים האפשריים של Y הם $k = 0,1,2,...$.

$P(Y = k) = P([X] = k) = P(k \le X < k+1) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$.