תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 7. פתרונות

1. (א) $X_i \sim U(a,b) \quad \Leftarrow \quad F_{X_i}(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<a\\ \dfrac{t-a}{b-a} & , \quad a\le t<b\\ 1 & , \quad t\ge b\end{cases}$. יהי $Y=\max(X_1,X_2,...,X_n)$, ידוע כי

$F_Y(t)=F_{X_1}(t)\cdot F_{X_2}(t)\cdot...\cdot F_{X_n}(t)$ ולכן $F_Y(t)=[F_{X_1}(t)]^n$, $F_Y(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<a\\ \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^n & , \quad a\le t<b\\ 1 & , \quad t\ge b\end{cases}$.

פונקציה $F_Y(t)$ רציפה על כל $\mathbf{R}$ והנגזרת שלה קיימת ורציפה בכל נקודה $t\in\mathbf{R}$ למעט $t=b$, $t=a$. מכאן נובע כי

פונקציית הצפיפות $f_Y(t)$ של מ"מ Y זהה לנגזרת $F'_Y(t)$: $f_Y(t)=F'_Y(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^{n-1}, & t\in[a,b]\\ 0, & t\notin[a,b]\end{cases}$.

ב) יהי $Z=\min(X_1,X_2,...,X_n)$. ידוע כי $F_Z(t)=1-(1-F_{X_1}(t))\cdot(1-F_{X_2}(t))\cdot...\cdot(1-F_{X_n}(t))$ ולכן

$F_Z(t)=1-[1-F_{X_1}(t)]^n$. מכאן $F_Z(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<a\\ 1-\left(\dfrac{b-t}{b-a}\right)^n & , \quad a\le t<b\\ 1 & , \quad t\ge b\end{cases}$.

$F_Z(t)$ רציפה על כל $\mathbf{R}$ והנגזרת שלה קיימת ורציפה בכל נקודה $t\in\mathbf{R}$ למעט $t=b$, $t=a$. מכאן

$f_Z(t)=F'_Z(t)=\begin{cases}\dfrac{n}{b-a}\left(\dfrac{b-t}{b-a}\right)^{n-1} & t\in[a,b]\\ 0, & t\notin[a,b]\end{cases}$.

2. חוזרים על הפתרון של השאלה 1. $X_i\sim Exp(\lambda) \quad \Leftarrow \quad F_{X_i}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\end{cases}$

בסימונים של שאלה 1 נקבל: (א) $F_Y(t)=[F_{X_1}(t)]^n \quad \Leftarrow$

$F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ (1-e^{-\lambda t})^n, & t\ge 0\end{cases}$ $f_Y(t)=F'_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ n\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}, & t\ge 0\end{cases}$. (ב) $F_Z(t)=1-[1-F_{X_1}(t)]^n$

$\Leftarrow$ $F_Z(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-e^{-\lambda nt}, & t\ge 0\end{cases}$, $f_Z(t)=F'_Z(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ n\lambda e^{-\lambda nt}, & t\ge 0\end{cases}$. (רואים שאם $X_i\sim Exp(\lambda)$ ו- $X_1,X_2,...,X_n$ בלתי תלויים, אז $Z=\min(X_1,X_2,...,X_n)\sim Exp(n\lambda)$.)

3. (א) נסמן ב- Y מ"מ המקבל ערך 0 בהסתברות 1: $Y\equiv 0$. $X^+=\max(X,Y) \Leftarrow$

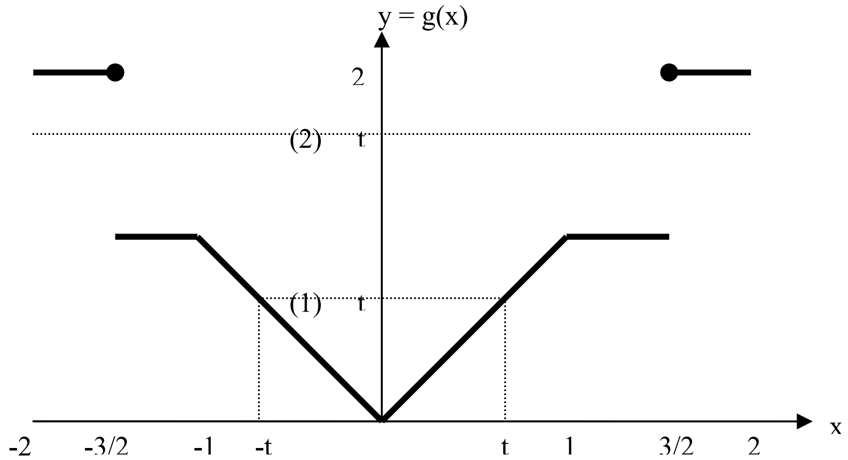
$F_{X^+}(t)=F_X(t)\cdot F_Y(t)=F(t)\cdot F_Y(t)$. $F_Y(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$ לכן $F_{X^+}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ F(t), & t\ge 0\end{cases}$

(ב) $X^-=\max(-X,Y) \Leftarrow F_{X^-}(t)=F_{(-X)}(t)\cdot F_Y(t)$.

$F_{(-X)}(t)=P\{-X\le -t\}=P\{X\ge -t\}=1-P\{X<-t\}=1-F((-t)^-)$. מכאן

$$F_{X^-}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-F((-t)^-), & t\ge 0\end{cases}.$$

5. (א) $X\sim U(-2,2) \Leftarrow$ $F_X(t)=\begin{cases}0 & , \quad t<-2\\ \dfrac{t+2}{4} & , \quad -2\le t<2\\ 1 & , \quad t\ge 2\end{cases}$. $Y=g(X)=\begin{cases}|X|, & |X|\le 1\\ 1, & 1<|X|<3/2\\ 2, & |X|\ge 3/2\end{cases}$.



עבור $x\in[-2,2]$, $0\le g(x)\le 2$. $\Leftarrow$ $0\le Y\le 2$. לכן לכל $t<0$ $F_Y(t)=0$ ולכל $t\ge 2$ $F_Y(t)=1$. אם $0\le t<2$,

במקרה (1): $0\le t<1$ נקבל $F_Y(t)=P\{Y\le t\}=P\{-t\le X\le t\}=F_X(t)-F_X(-t)=\dfrac{2t}{4}=\dfrac{t}{2}$;

במקרה (2): $1\le t<2$ נקבל $F_Y(t)=P\{Y\le t\}=P\{-3/2\le X\le 3/2\}=F_X(3/2)-F_X(-3/2)=\dfrac{3}{4}$. מכאן

$$F_Y(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t/2, & 0\le t<1\\ 3/4, & 1\le t<2\\ 1, & t\ge 2\end{cases}.$$

(ב) $0\le Y\le 2 \Leftarrow 0\le Z\le 4$, לכן עבור $t<0$ $F_Z(t)=0$ ולכל $t\ge 4$ $F_Z(t)=1$. עבור $0\le t<4$

$$F_Z(t)=P\{Y^2\le t\}=P\{Y\le\sqrt{t}\}=F_Y(\sqrt{t})=\begin{cases}\sqrt{t}/2, & 0\le\sqrt{t}<1\\ 3/4, & 1\le\sqrt{t}<2\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{t}/2, & 0\le t<1\\ 3/4, & 1\le t<4\end{cases}.$$

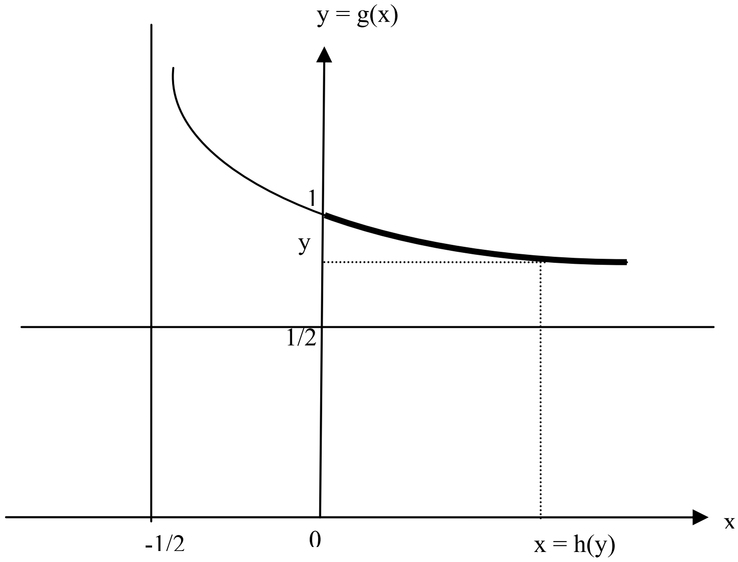
$$F_Z(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sqrt{t}/2 & 0\le t<1\\ 3/4 & 1\le t<4\\ 1 & t\ge 4\end{cases}$$

6. $y=g(x)=\dfrac{1+x}{1+2x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x+1}{x+1/2}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{x+1/2+1/2}{x+1/2}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1/2}{x+1/2}\right)=1/2+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1/2}$,

מ"מ X רציף ומקבל בהסתברות 1 ערכים חיוביים, פונקציה $y=g(x)$ יורדת ממש עם נגזרת רציפה כאשר $x\ge 0$, לכן $Y=g(X)$ גם משתנה מ"מ רציף. נמצא את פונקציית הצפיפות שלו $f_Y(y)$. כאשר $x\ge 0$ הפונקציה $y=g(x)$ מקבלת ערכים בקטע $(1/2,1]$ ולכן עבור $y\notin(1/2,1]$ $f_Y(y)=0$. לפי המשפט על צפיפות של טרנספורמציה של מ"מ, עבור $y\in(1/2,1]$ $f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|$. נמצא את הפונקציה ההפוכה $x=h(y)=g^{-1}(y)$: אם $y\in(1/2,1]$ ו- $y=\dfrac{1+x}{1+2x} \Leftarrow x=h(y)=\dfrac{1-y}{2y-1}$. $x=h'(y)=-\dfrac{1}{(2y-1)^2}$

ו- $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ כאשר $x \ge 0$. מכאן $f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|=\lambda e^{-\lambda\frac{1-y}{2y-1}}\cdot\frac{1}{(2y-1)^2}$ לכל $y\in(1/2,1]$

ו- $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{\lambda}{(2y-1)^2}e^{\lambda\frac{y-1}{2y-1}} & 0.5<y<1\\ 0, & else\end{cases}$.



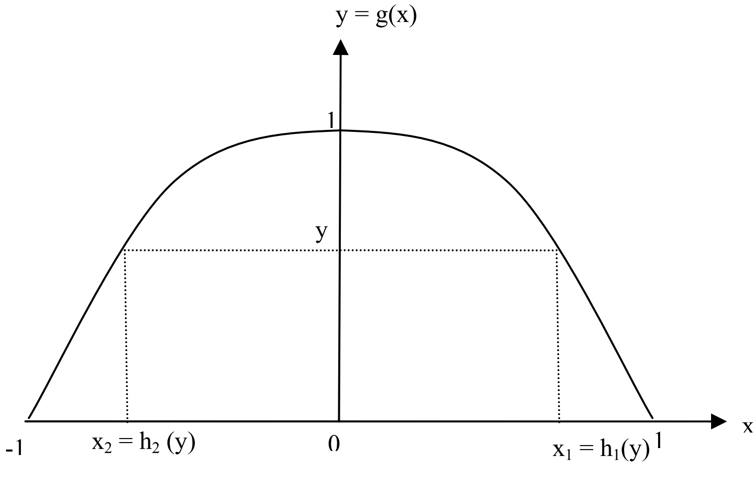
7. $Y=g(X)=1-X^2$. מ"מ X רציף ומקבל בהסתברות 1 ערכים $x\in[-1,1]$, פונקציה $y=g(x)=1-x^2$ מונוטונית ממש למקוטעין עם נגזרת רציפה. לכן $Y=g(X)$ גם משתנה מ"מ רציף. נמצא את פונקציית הצפיפות שלו $f_Y(y)$. כאשר $x\in[-1,1]$ הפונקציה $y=g(x)$ מקבלת ערכים בקטע $[0,1]$ ולכן לכל $y\notin[0,1]$ $f_Y(y)=0$.

אם $y=g(x)=1-x^2 \;\Leftarrow\; x_1=h_1(y)=g_1^{-1}(y)=\sqrt{1-y},$,

$x_2=h_2(y)=g_2^{-1}(y)=-\sqrt{1-y},$. עבור $y\in[0,1]$

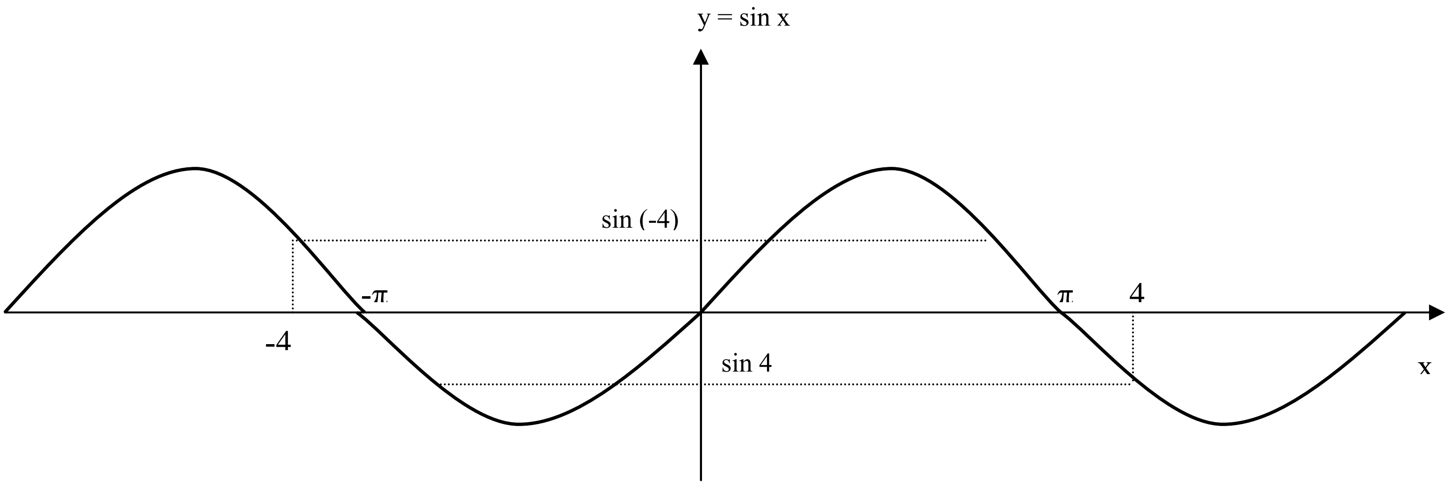
$$f_Y(y)=\sum_{i=1}^{2}f_X(h_i(y))\cdot|h_i'(y)|=(\sqrt{1-y}+1)/2\cdot\left|-\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\right|+(-\sqrt{1-y}+1)/2\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-y}}$$



8. $X\sim U(-4,4)$, ו- $Y=g(X)=\sin X$. מ"מ X רציף ומקבל ערכים בקטע $[-4,4]$, פונקציה $y=g(x)=\sin x$ מונוטונית ממש למקוטעין עם נגזרת רציפה. לכן $Y=g(X)$ גם משתנה מ"מ רציף. נמצא את

פונקציית הצפיפות שלו $f_Y(y)$.



כאשר $x\in[-4,4]$ הפונקציה $y=g(x)=\sin x$ מקבלת ערכים בקטע $[-1,1]$ ולכן עבור $y\notin[-1,1]$ $f_Y(y)=0$. נפתור את המשוואה $y=g(x)=\sin x$:

(1) אם $-1\le y<\sin 4$, נקבל $x_1=h_1(y)=g_1^{-1}(y)=\arcsin y$, $x_2=h_2(y)=g_2^{-1}(y)=-\pi-\arcsin y$;

(2) אם $\sin(-4)<y\le 1$, נקבל $x_1=h_1(y)=g_1^{-1}(y)=\arcsin y$, $x_2=h_2(y)=g_2^{-1}(y)=\pi-\arcsin y$;

(3) אם $\sin(-4)\le y\le \sin 4$, נקבל $x_1=h_1(y)=g_1^{-1}(y)=\arcsin y$, $x_2=h_2(y)=g_2^{-1}(y)=-\pi-\arcsin y$, $x_3=h_3(y)=g_3^{-1}(y)=\pi-\arcsin y$.

$$f_Y(y)=\sum_i f_X(h_i(y))\cdot|h_i'(y)|=\begin{cases}1/4\sqrt{1-y^2}, & y\in(-1,\sin 4)\\ 1/4\sqrt{1-y^2}, & y\in(\sin(-4),1)\\ 3/8\sqrt{1-y^2}, & y\in(\sin 4,\sin(-4))\end{cases}$$

ו- $f_Y(y)=0$ עבור $y\notin[-1,1]$.

9. יהיו $A_1=$ "הפקידה פנויה", $A_2=$ "הפקידה שותה קפה", $A_3=$ "הפקידה עסוקה עם לקוח הקודם", $A_4=$ " הפקידה מפטפטת בטלפון". ארבעת המאורעות A_i ($i=1,2,3,4$) זרים זה לזה והאיחוד שלהם הוא כל מרחב הדגם. $P(A_i)=p_i$ ו- $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$. נסמן ב- מ"מ X זמן המתנה של הלקוח עד לקבלה אצל הפקידה ונשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$F(t)=P\{X\le t\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X\le t/A_i\}P(A_i)=\sum_{i=1}^{4}P\{X_i\le t\}P(A_i)=\sum_{i=1}^{4}F_{X_i}(t)\cdot p_i ,$$

כאשר $X_1\equiv 0$ זמן המתנה של הלקוח במקרה הראשון: הפקידה פנויה, $F_{X_1}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$. המ"מ X_2,X_3,X_4 אחידים $\Leftarrow$

$$F_{X_2}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{30}, & 0\le t<30\\ 1, & t\ge 30\end{cases},\ F_{X_3}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{20}, & 0\le t<20\\ 1, & t\ge 20\end{cases},\ F_{X_4}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{40}, & 0\le t<40\\ 1, & t\ge 40\end{cases}.$$

מציבים פונקציות ההתפלגות $F_{X_i}(t)$ בנוסחה $F(t)=\sum_{i=1}^{4}F_{X_i}(t)\cdot p_i$ (הסכום המשוקלל של פונקציות ההתפלגות $F_{X_i}(t)$ עם המשקלים p_i) ומקבלים:

$$F(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ p_1+t(4p_2+6p_3+3p_4)/120, & 0\le t<20 \\ p_1+p_3+t(4p_2+3p_4)/120, & 20\le t<30 \\ p_1+p_3+p_2+tp_4/40, & 30\le t<40 \\ 1, & t\ge 40 \end{cases}$$