

# תורת הסתברות 1

201-10131

## תרגול 9. פתרונות

$$Y = g(X) = e^{2X/3} \cdot P\{X \in [0, \infty)\} = 1, F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \leq t \end{cases} \cdot f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (א) \cdot 1$$

$$, 1 \leq t \quad F_Y(t) = 0 \quad t < 1 \Leftrightarrow P\{Y \in [1, \infty)\} = 1 \Leftrightarrow g : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$$

$$F_Y(t) = P\{e^{2X/3} \leq t\} = P\{X \leq 3 \ln t / 2\} = F_X(3 \ln t / 2)$$

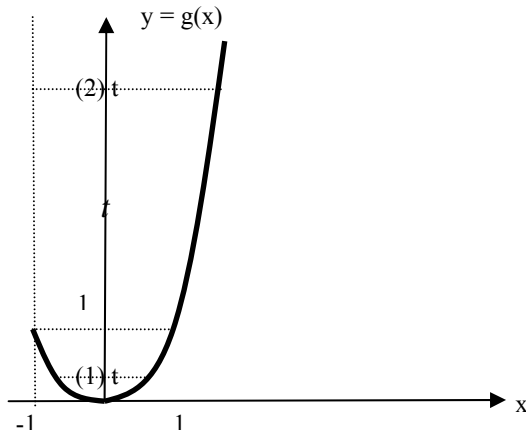
$$t > 1 \quad \text{ורציפה לכל } t \neq 1 \text{ מכאן } f_Y(t) = F_Y'(t) = f_X(3 \ln t / 2) \cdot (3/2t) = e^{-3 \ln t / 2} \cdot (3/2t) = 3t^{-5/2} / 2$$

$$f_Y(t) = 0 \quad t \leq 1 \text{ ולכל } t, f_Y(t) = F_Y'(t) = [F_X(3 \ln t / 2)]' = f_X(3 \ln t / 2) \cdot (3/2t) = e^{-3 \ln t / 2} \cdot (3/2t) = 3t^{-5/2} / 2$$

$$.V(Y) = \infty \Leftrightarrow E(Y^2) = \int_1^\infty y^2 \cdot \frac{3}{2} y^{-5/2} dy = 3y^{1/2} \Big|_1^\infty = \infty \quad .E(Y) = \int_1^\infty y \cdot \frac{3}{2} y^{-5/2} dy = -3y^{-1/2} \Big|_1^\infty = 3 \quad (ב)$$

$$.f_X(x) = \begin{cases} a(1+|x-2|), & -1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} a(3-x), & -1 \leq x \leq 2 \\ a(x-1), & 2 < x \leq 4 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad \cdot 2$$

$$.a = \frac{2}{23} \Leftrightarrow 1 = \int_{-\infty}^\infty f_X(x) dx = \int_{-1}^2 a(3-x) dx + \int_2^4 a(x-1) dx = a \cdot \frac{23}{2} \quad (א)$$



$$F_Y(t) = 0 \quad t < -1 \Leftrightarrow ., g : [-1, 4] \rightarrow [0, 16] \quad Y = g(X) = X^2, \quad P\{X \in [-1, 4]\} = 1 \quad (ב)$$

$$0 \leq t < 1 : (1) \text{ במקרה } . F_Y(t) = 1 \quad 4 \leq t$$

$$, F_Y(t) = P\{X^2 \leq t\} = P\{\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\} = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$$

$$. F_Y'(t) = f_X(\sqrt{t}) \cdot (1/2\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t}) \cdot (1/2\sqrt{t}) = (1/2\sqrt{t})[a(3-\sqrt{t}) + a(3+\sqrt{t})] = 3a/\sqrt{t} = 6/23\sqrt{t}$$

$$: (2) \text{ במקרה}$$

$$, F_Y(t) = P\{X^2 \leq t\} = P\{-1 \leq X \leq \sqrt{t}\} = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-1) = F_X(\sqrt{t}) \quad 1 \leq t < 16$$

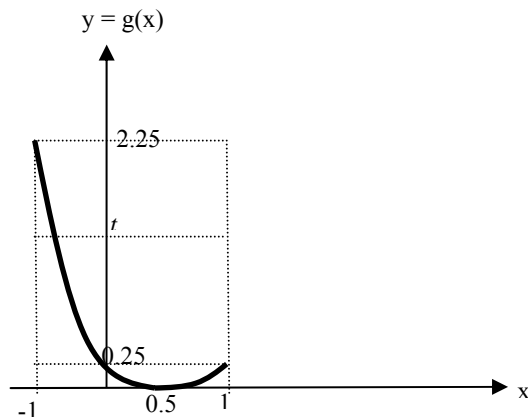
$$F'_Y(t) = f_X(\sqrt{t}) \cdot (1/2\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \begin{cases} a(3-\sqrt{t}), & 1 < \sqrt{t} \leq 2 \\ a(\sqrt{t}-1), & 2 \leq \sqrt{t} < 4 \end{cases} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \begin{cases} a(3-\sqrt{t}), & 1 < t \leq 4 \\ a(\sqrt{t}-1), & 4 < t < 16 \end{cases} = \begin{cases} (3-\sqrt{t})/23\sqrt{t}, & 1 < t \leq 4 \\ (\sqrt{t}-1)/23\sqrt{t}, & 4 < t < 16 \end{cases}$$

הפונקציה  $F_Y(t)$  רציפה לכל  $t$  ו- $F'_Y(t)$  קיימת ורציפה לכל  $t \neq 0, 1, 16$ . מכאן  $f_Y(t) = F'_Y(t)$  לכל

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{6}{23\sqrt{t}}, & 0 < t < 1 \\ \frac{3}{23\sqrt{t}} - \frac{1}{23}, & 1 < t \leq 4 \\ \frac{1}{23} - \frac{1}{23\sqrt{t}}, & 4 < t < 16 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad t \neq 0, 1, 16$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \cdot \frac{6}{23\sqrt{y}} dy + \int_1^4 y \cdot \frac{1}{23} \left( \frac{3}{\sqrt{y}} - 1 \right) dy + \int_4^{16} y \cdot \frac{1}{23} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy = \frac{559}{138} \quad (ג)$$

3.  $\Leftarrow g: [-1, 1] \rightarrow [0, 2.25], Y = g(X) = (X - 0.5)^2, P\{X \in [-1, 1]\} = 1, f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$



לכל  $t < -1, F_Y(t) = 0$  ולכל  $2.25 \leq t, F_Y(t) = 1$

במקרה (1):  $0 \leq t < 0.25$

$$F_Y(t) = P\{(X - 0.5)^2 \leq t\} = P\{-\sqrt{t} + 0.5 \leq X \leq \sqrt{t} + 0.5\} = F_X(\sqrt{t} + 0.5) - F_X(-\sqrt{t} + 0.5)$$

$$F'_Y(t) = f_X(\sqrt{t} + 0.5) \cdot 1/2\sqrt{t} + f_X(-\sqrt{t} + 0.5) \cdot 1/2\sqrt{t} = (1/2\sqrt{t}) \cdot [1/2 + 1/2] = (1/2\sqrt{t})$$

במקרה (2):  $0.25 \leq t < 2.25$

$$F_Y(t) = P\{(X - 0.5)^2 \leq t\} = P\{-\sqrt{t} + 0.5 \leq X \leq 1\} = 1 - F_X(-\sqrt{t} + 0.5)$$

$$F'_Y(t) = f_X(-\sqrt{t} + 0.5) \cdot 1/2\sqrt{t} = 1/2 \cdot (1/2\sqrt{t}) = 1/4\sqrt{t}$$

הפונקציה  $F_Y(t)$  רציפה לכל  $t$  ו- $F'_Y(t)$  קיימת ורציפה לכל  $t \neq 0, 0.25, 2.25$ . מכאן  $f_Y(t) = F'_Y(t)$  לכל

$$f_Y(t) = \begin{cases} 1/2\sqrt{t}, & 0 < t \leq 0.25 \\ 1/4\sqrt{t}, & 0.25 < t \leq 2.25 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad t \neq 0, 0.25, 2.25$$

$$E(Y) = \int_0^{1/4} y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy + \int_{1/4}^{9/4} y \cdot \frac{1}{4\sqrt{y}} dy = \frac{7}{12}$$

4. מרחב ההסתברות  $(\Omega, P)$ : מרחב המדגם  $\Omega$  הוא כל  $2^3 = 8$  התוצאות האפשריות  $\omega$  של הטלת המטבע שלוש

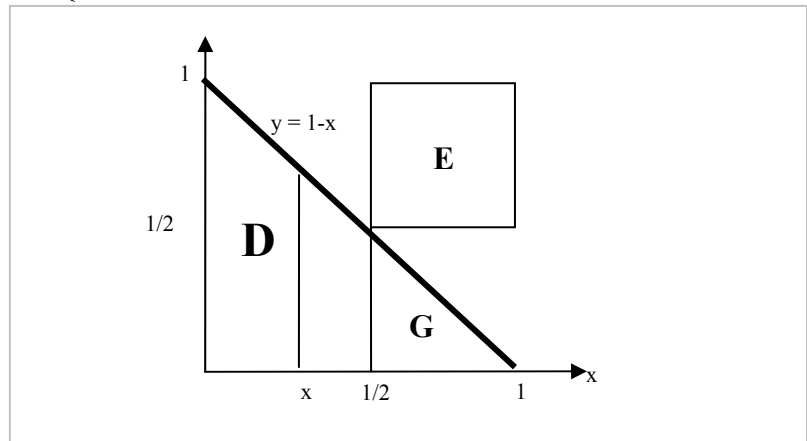
פעמים, מרחב ההסתברות סימטרי: לכל  $\omega \in \Omega, P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$ . נמצא פונקציית ההסתברות המשותפת

.  $X$  ו-  $Y$  הם הערכים האפשריים של  $i = 0,1,2; j = 0,1,2,3$  כאשר  $p_{X,Y}(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$   
 $P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 2, Y = 2\} = P\{X = 2, Y = 3\} = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$   
 נקבל  $P\{X = 1, Y = 1\} = P\{X = 2, Y = 3\} = \frac{2}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$

( $X$  ו-  $Y$  תלויים) .  $X \sim B(2, 1/2), Y \sim B(3, 1/2)$

$i \backslash j$	0	1	2	$p_Y(j)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	1/4	0	3/8
2	0	1/4	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$p_X(i)$	1/4	1/2	1/4	1

5. יהי  $D = \{(x, y) : 0 < x, y < 1, 0 < x + y < 1\}$   
 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{else} \end{cases}$



$$c = \frac{1}{S(D)} = \frac{1}{1/2} = 2 \iff 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_D f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_D c dx dy = cS(D) \quad (\text{א})$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \cdot f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2 dy, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

כי  $x$  ו-  $y$  משתתפים בצפיפות  $f_{X,Y}(x, y)$  באופן סימטרי. (ג)  $E(X) = \int_0^1 x \cdot 2(1-x) dx = \frac{1}{3}$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{18}, \quad E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x) dx = \frac{1}{6}$$

(ד) אם  $M, X, Y$  בלתי-תלויים, אז  $P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}$  לכל קבוצות  $A$  ו-  $B$  על הישר.

ניקה  $A = [0.5, 1], B = [0.5, 1]$  ונראה כי  $P\{X \in A, Y \in B\} \neq P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}$

לכל תחום מישורי  $E$   $P\{(X, Y) \in E\} = \iint_E f_{X,Y}(x, y) dx dy$  הוא הריבוע  $E = [0.5, 1] \times [0.5, 1]$

$$P\{X \in [0.5,1], Y \in [0.5,1]\} = P\{(X,Y) \in E\} = \iint_E f_{X,Y}(x,y) dx dy = \iint_E 0 dx dy = 0$$

$$P\{Y \in [0.5,1]\} = P\{X \in [0.5,1]\} > 0 \quad \neg, P\{X \in [0.5,1]\} = P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f_{X,Y}(x,y) dx dy = cS(G) = \frac{S(G)}{S(V)} > 0$$

$$0 = P\{X \in [0.5,1], Y \in [0.5,1]\} \neq P\{X \in [0.5,1]\} \cdot P\{Y \in [0.5,1]\} > 0 \quad \text{לכן}$$

**.6**

$$P\{(X,Y) \in A\} = \iint_A f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_1^2 \left\{ \int_0^{0.5} \frac{3x(x+y)}{5} dx \right\} dy = \int_1^2 \left\{ \frac{3}{5} \cdot \left( \frac{x^3}{3} + \frac{yx^2}{2} \right) \right\}_{x=0}^{x=0.5} dy = \int_1^2 \frac{3}{5} \cdot \left( \frac{1}{24} + \frac{y}{8} \right) dy = \frac{11}{80}$$

$$f_{X,Y}(x,y) \text{ פונקציית הצפיפות המשותפת} \quad F_{X,Y}(t,s) = P\{X \leq t, Y \leq s\} = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad t,s \text{ לכל } .7$$

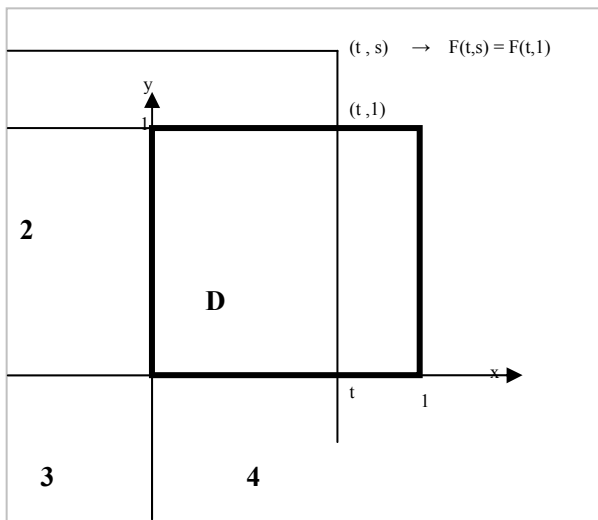
שווה לאפס חוץ מריבוע  $D = \{(x,y) : 0 < x, y < 1\}$ , לכן מ"מ דו-ממדי  $(X,Y)$  בהסתברות 1 מקבל ערכים בתוך הריבוע  $D$  ומכאן ולכל תחום  $E$  על המישור  $P\{(X,Y) \in E\} = P\{(X,Y) \in E \cap D\}$

לכל  $(t,s)$  ברבעונים 4,3,2 נקבל  $F_{X,Y}(t,s) = P\{X \leq t, Y \leq s\} = 0$  עבור  $t \geq 1, s \geq 1$ . עבור  $(t,s)$  שבתוך הריבוע  $D$  ( $0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ )

$$F_{X,Y}(t,s) = P\{X \leq t, Y \leq s\} = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^t f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^s \int_0^t (x+y) dx dy = \int_0^s \left( \frac{t^2}{2} + ty \right) dy = \frac{t^2 s + ts^2}{2}$$

$$F_{X,Y}(t,s) = P\{X \leq t, Y \leq s\} = P\{X \leq t, Y \leq 1\} = F_{X,Y}(t,1) = \frac{t^2 \cdot 1 + t \cdot 1^2}{2} = \frac{t^2 + t}{2} \quad 0 \leq t \leq 1, s \geq 1 \text{ עבור}$$

$$F_{X,Y}(t,s) = P\{X \leq t, Y \leq s\} = P\{X \leq 1, Y \leq s\} = F_{X,Y}(1,s) = \frac{1^2 \cdot s + 1 \cdot s^2}{2} = \frac{s^2 + s}{2} \quad t \geq 1, 0 \leq s \leq 1 \text{ עבור}$$



$$F_{X,Y}(t,s) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \text{ or } s \leq 0 \\ ts(t+s)/2, & 0 < t, s < 1 \\ t(t+1)/2, & 0 < t < 1, s \geq 1 \\ s(s+1)/2, & 0 < s < 1, t \geq 1 \\ 1, & x, y \geq 1 \end{cases}$$

8. מרחב ההסתברות  $(\Omega, P)$ : מרחב המדגם  $\Omega$  הוא כל  $2^3 = 8$  התוצאות האפשריות  $\omega$  של הטלת המטבע שלוש

פעמים, מרחב ההסתברות סימטרי: לכל  $\omega$   $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$ .

(א) הערכים האפשריים של מ"מ דו-מימדי  $(X, Y) = (X(\omega), Y(\omega))$  הם זוגות  $(i, j)$ , כאשר  $i, j = 1, 2, 3$ . נמצא פונקצית ההסתברות המשותפת  $p(i, j) = p_{X,Y}(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$ . נחשב כמה ערכים של הפונקציה

$p(i, j)$  נסמן "עץ" ב-1, ו-"פלי" ב-0, ונקבל  $P\{X = 0, Y = 0\} = P((0,0,0)) = \frac{1}{8}$

$P\{X = 2, Y = 0\} = P(\emptyset) = 0$ ,  $P\{X = 1, Y = 0\} = P((1,0,0)) = \frac{1}{8}$

$P\{X = 1, Y = 1\} = P((1,0,1)) + P((0,1,0)) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

בשולי הטבלה מסכמים את ההסתברויות  $p(i, j) = P\{X = i, Y = j\}$

	0	1	2	$p_Y(y)$
$x \backslash y$				
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	2/8	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
$p_X(x)$	1/4	1/2	1/4	1

ומקבלים את פונקציות ההסתברות השוליות של  $X, Y$ . מ"מ  $X, Y$  תלויים, למשל מפני שמתקיים את האי-שביון

$0 = p(2,0) = P\{X = 2, Y = 0\} \neq P\{X = 2\}P\{Y = 0\} = p(2) \cdot p(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$P(X = Y) = \sum_i P(X = i, Y = i) = \sum_i p(i, i) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$  (ב)

$E(Y) = E(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  ומכאן  $Y \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$  ו-  $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$  (ג)

$(V(X) = np(1-p), E(X) = np, X \sim B(n, p)$  כי עבור  $V(Y) = V(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4}, E(XY) = \sum_{(i,j)} ij \cdot p(i, j) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + \dots = 1 \cdot \frac{1}{4}$

$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1/4}{\sqrt{1/2} \sqrt{1/2}} = \frac{1}{2}$ ,

$V(X - Y) = Cov(X - Y, X - Y) = Cov(X, X) - 2Cov(X, Y) + Cov(Y, Y) =$   
 $= V(X) - 2Cov(X, Y) + V(Y) = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  (ד)

$P\{X = 1 / Y = 1\} = \frac{1}{2}$  באופן דומה  $P\{X = 0 / Y = 1\} = \frac{P\{X = 0, Y = 1\}}{P\{Y = 1\}} = \frac{p_{X,Y}(0,1)}{p_Y(1)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$  (ה)

$P\{X = 2 / Y = 1\} = \frac{1}{4}$