אוניברסיטה בן גוריון בנגב
מדור הבחינות

תאריך הבחינה: 26.02.10
שמות המרצים: ל.ברזנסקי, ד"ר ארתור יוסף
מספר הקורס 201.1.131
שם הקורס תורת ההסתברות 1
שנה: תשס"ה; סמסטר:א; מועד:ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפ' נוסחאות מצורפות
מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4 שאלות מתוך 5</u>
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאל

<u>שאלה 1.</u>

יהי $G=\{(x,y):0\le y\le x\le 2\}$ ותהי פונקצית הצפיפות המשותפת של (X,Y):

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx^2y, & (x,y)\in G, \\ 0, & else \end{cases}.$$

א) מצא C , $f_Y(y), f_X(x)$ 9 נ'
ב) מצא $E(X|Y=0.5), f_{X|Y}(x|y)$. 6 נ'
ג) האם X,Y בלתי מתואמים, בלתי תלויים? 10 נ'

<u>שאלה 2.</u>

נתון $X\sim U(-3,1)$. $Y=\begin{cases} |X^2+2X|, & X\ge -2 \\ -X-2, & X<-2 \end{cases}$

. כמו-כן, נתונה פונקצית היתפלגות של משתנה מקרי W ע"י $F_W(w)=\frac{\arctan w}{\pi}+\frac{1}{2}$ לכל w ממשי. נגדיר

$$Z=\begin{cases} W+1 & ,-1\le W<0 \\ W^3+1 & ,0\le W<1 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

א) מצא $f_Y(y)$. 10 נ'
ב) מצא $F_Z(z)$. 10 נ'
ג) חשב $P(Z>W)$. 5 נ'

<u>שאלה 3.</u>

זמן המחייה של חרק שחור מתפלג אחיד רציף $[0,6]$ בשנים וזמן מחייה של חרק לבן מתפלג מעריכי עם ממוצע 6 שנים, לשאר חרקים זמן מחייה מתפלג נורמלי עם ממוצע 7 שנים וסטיית תקן 3 שנים.

א. בארץ מסויימת יש 30 מיליון חרקים שמתוכם 12 מיליון לבנים, 14 מיליון שחורים ו-4 מיליון אחרים. ידוע שחרק מסויים חיי כבר שלוש שנים. מה ההסתברות שהוא חרק שחור? 10 נ'

ב. לילד יש בקופסא 30 חרקים שחורים, 50 לבנים ו-60 אחרים.

(1) מה הסתברות שכל החרקים עדיין יהיו חיים לאחר 4 שנים?

(2) מה הסתברות שלאחר שנתיים לפחות אחת ימות ?

(3) אם ילד הוציא 2 חרקים מהקופסא ללא החזרה. מה הסתברות שבינהם לא יהיו לבנים? 15 נ'

<u>שאלה 4.</u>

במרפאה מסוימת יש n (n טבעי גדול מ-1) רופאים אשר מקבלים חולים במרפאה בזה אחר זה ללא הפסקה וללא תלות אחד בשני. ידוע שזמן הטיפול של כל חולה אצל הרופא i מתפלג מעריכי עם פרמטר λ_i לכל $1 \le i \le n$. (בדקות)

א. מה הסתברות שבמשך שעה ראשונה יטופלו יותר מ-5 אנשים ע"י רופא הראשון? 7 נ'

ב. נתון: $\lambda_i = 10$, $n=10$ לכל רופא בדקות. חולה מסוים עבר כל רופאים. מה הסתברות שמקסימום של זמן הטיפול אצל רופא אחד קטן מ 20 דקות אם ידוע שכל טיפול אצל רופא אחד היה לפחות 5 דקות. 9 נ'

ג. מה ההסתברות שזמן טיפול אצל רופא ראשון יותר גדול מזמן הטיפול אצל רופא השני ? 9 נ'

<u>שאלה 5.</u>

בחברה מסויימת יש 40 מכוניות הזקוקות לתיקון.

זמן תיקון מכונית בחברה זו מתפלג רציף עם פונקציה הצפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & ,0 \le x \le 3 \\ 0 & ,else \end{cases}$$

בשעות עבור קבוע $c \ge 0$, כמו-כן נניח שהתפלגות התיקון של כל מכונית זהה וגם שיש אי תלות ביניהם.

א. אילו היו מתקנים מכוניות אחד אחרי השניה, מה ההסתברות לכך שזמן התיקון של כל המכוניות לא יעלה על 81 שעות? (<u>שימו לב</u> לכך שיש צורך בהתחלה למצוא את c). 11 נ

ב. מכונה מסוימת מתוקננת את בו זמנית.

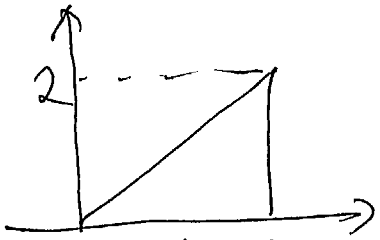
(1) מה ההסתברות שזמן הטיפול כולו לא יעלה על שעתיים? 8 נ'

(2) מהי הסטיית התקן של זמן התיקון של המכונה? 6 נ'

<u>בהצלחה!</u>

שאלה 1

א)



$$c\iint_D x^2y\,dx\,dy=1$$

$$c\int_0^2 dx\int_0^x x^2y\,dy = c\int_0^2 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^x dx = \frac{16}{5}c=1.$$

$$c=\frac{5}{16}$$

$$f_X(x)=\frac{5}{16}\int_0^x x^2y\,dy=\frac{5}{32}x^4$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{32}x^4, & 0<x<2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{5}{16}\int_y^2 x^2y\,dx=\frac{5}{48}y(8-y^3)$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{5}{48}y(8-y^3) & 0<y<2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{5}{16}x^2y}{\frac{5}{48}y(8-y^3)}$$

$$=\begin{cases}\frac{3x^2}{8-y^3}, & y<x<2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$\underline{0<y<2}$ [illegible]

$$f_{X|Y}(x|0.5)=\begin{cases}\frac{3x^2}{8-\frac{1}{8}}, & \frac{1}{2}<x<2\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$E(X|Y=0.5)=\frac{24}{63}\int_{1/2}^{2}x^3\,dx\approx\underline{1.51}$$

ב)

$$f_X(1)=\frac{5}{32},\quad f_Y(1)=\frac{35}{48}$$

$$f_{X,Y}(1,1)=\frac{5}{16}\neq f_X(1)\cdot f_Y(1)$$

אז X ו-Y הם תלויים.

$$Cov(X,Y)=\iint_D xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy-EX\cdot EY=$$

$$=\frac{5}{16}\int_0^2 dx\int_0^x x^3y^2\,dy-\frac{5}{32}\int_0^2 x^5\,dx\cdot\frac{5}{48}\int_0^2 y^2(8-y^3)\,dy$$

$$=\frac{5}{16}\,\frac{x^7}{7}\Big|_0^2-\frac{5}{32}\cdot\frac{5}{48}\,\frac{x^6}{6}\Big|_0^2\cdot\left(\frac{8y^3}{3}-\frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^2=$$

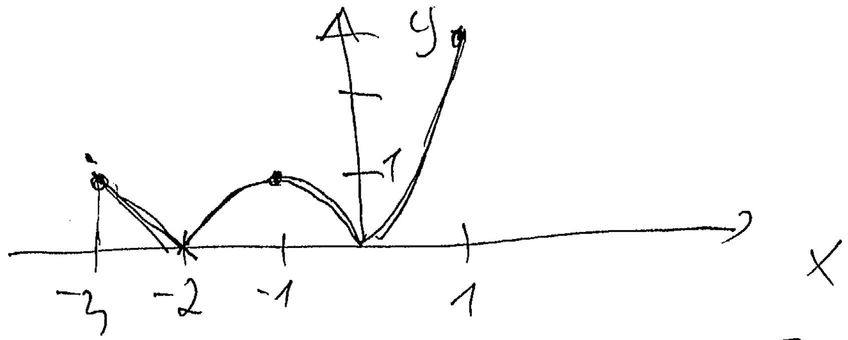
$$=\frac{5}{16\cdot 7}\cdot 2^7-\frac{25}{32\cdot 48\cdot 6}\cdot 2^6\left(\frac{8}{3}2^3-\frac{2^6}{6}\right)\neq 0$$

[illegible] ראשון ~~[illegible]~~ יש 7 [illegible] [illegible] [illegible]

א) 7. אז [illegible] לא [illegible]

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -3<x<1 \\ 0, & \text{u) ak} \end{cases}$$

(к 2) бке



$h_1(y) = -2-y$, $h_2(y) = -1-\sqrt{1-y}$, $h_3(y) = -1+\sqrt{1-y}$

$h_4(y) = 1-\sqrt{1+y}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-y}}+\frac{1}{2\sqrt{1+y}}\right), & 0<y<1 \\ \frac{1}{8\sqrt{1+y}}, & 1<y<3 \\ 0, & \text{u) ak} \end{cases}$$

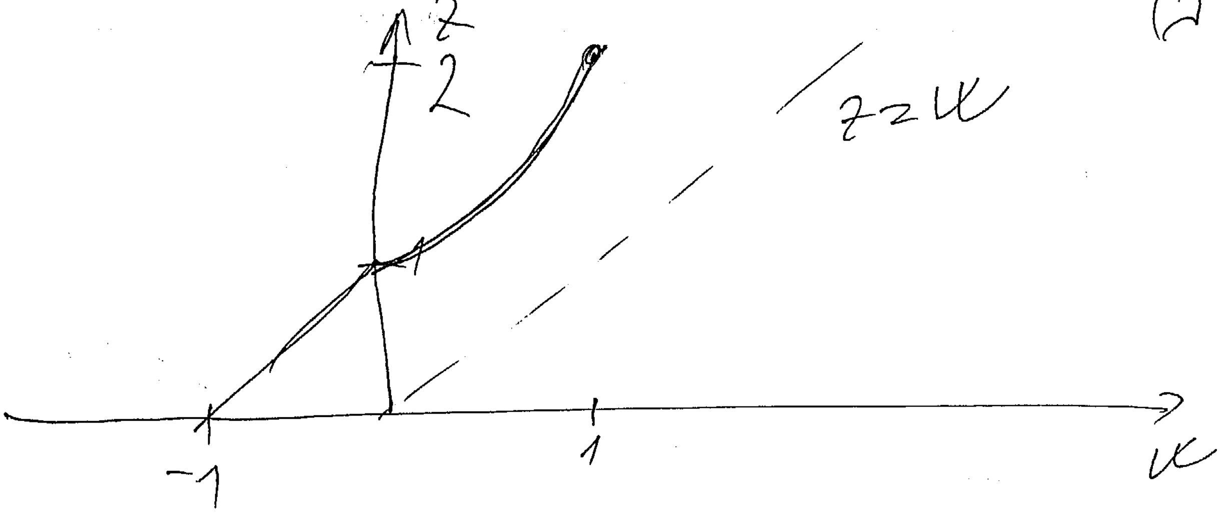
1) $0<y<1$

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{4} f_X(h_k(y))\,|h_k'(y)| = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+y}}$$

2) $1<y<3$ $\quad f_Y(y) = f_X(h_4(y))\cdot|h_4'(y)| =$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+y}}$$

(2)



$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{\arctan(z-1)}{\pi} & 0 \leq z < 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{\arctan \sqrt[3]{z-1}}{\pi} & 1 \leq z < 2 \\ 1 & z \geq 2 \end{cases}$$

1) $\quad 0 \leq z < 1$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z=0) + P(0<Z<z) =$$
$$= P(W<-1) + P(W>1) + P(-1<W<z-1) =$$
$$= \cancel{F_W(-1)} + 1 - F_W(1) + F_W(z-1) - \cancel{F_W(-1)} =$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{\arctan(z-1)}{\pi}$$

2) $\quad 1 \leq z < 2$

$$F_Z(z) = F_Z(1) + P(1<Z<z) = \frac{3}{4} + P(0<W<\sqrt[3]{z-1})$$
$$= \frac{3}{4} + F_W(\sqrt[3]{z-1}) - \cancel{F_W(0)} = \frac{3}{4} + \frac{\arctan \sqrt[3]{z-1}}{\pi}$$

c

$$P(Z>W) = P(W<1) =$$
$$= F_W(1) = \frac{\arctan 1}{\pi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$F_{X_1}(t) = \frac{t}{6}, \quad F_{X_2}(t) = 1 - e^{-t/6}$ 3 ДБКС

$X_1 \sim U(0, 6), \quad X_2 \sim exp\left(\frac{1}{6}\right), \quad X_3 \sim N(\mu = 7, \sigma^2 = 3^2)$ (e

$$p(A_1 \mid X > 3) = \frac{p(A_1)\, p(X > 3 \mid A_1)}{\sum_{k=1}^{3} p(A_k)\, p(X > 3 \mid A_k)} =$$

$$= \frac{\frac{12}{30}\, p(X_1 > 3)}{\frac{12}{30}\, p(X_1 > 3) + \frac{14}{30}\, p(X_2 > 3) + \frac{4}{30}\, p(X_3 > 3)}$$

$$= \frac{\frac{12}{30}\left(1 - \frac{3}{6}\right)}{\frac{12}{30}\left(1 - \frac{3}{6}\right) + \frac{14}{30} \cdot e^{-3/6} + \frac{4}{30}\left(1 - \varphi\left(\frac{3-7}{3}\right)\right)}$$

$$\approx 0.33$$

(1 (2

$$[p(X_1 > 4)]^{30} \cdot [p(X_2 > 4)]^{50} \cdot [p(X_3 > 4)]^{60} =$$

$$= \left(1 - \frac{4}{6}\right)^{30} \cdot \left(e^{-4/6}\right)^{50} \left[1 - \varphi\left(\frac{4-7}{3}\right)\right]^{60} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{30} e^{-\frac{100}{3}} \cdot (0.85)^{60}$$

$$1 - (p(X_1 > 2))^{30} \cdot (p(X_2 > 2))^{50} \cdot (p(X_3 > 2))^{60} =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{2}{6}\right)^{30} \left(e^{-2/6}\right)^{50} \left[1 - \varphi\left(\frac{2-7}{3}\right)\right]^{60}$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{30} e^{-50/3} \cdot (0.96)^{60}$$

$x_i \sim \exp(\lambda_0) \qquad F_{x_i}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ <u>שאלה 4</u>

א) נסמן y – מספר האנשים שנכנסו לחנות / הגיעו במהלך השעה

$y \sim P(\lambda_1), \quad P(y=k) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}$

$P(y>5) = 1 - P(y \le 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!}$

ב

$$P(\max\{x_1, \dots, x_{10}\} < 20 \mid x_1 > 5, \dots, x_{10} > 5) =$$

$$= \frac{P(x_1 < 20, \dots, x_{10} < 20, x_1 > 5, \dots, x_{10} > 5)}{P(x_1 > 5) \cdots P(x_{10} > 5)} =$$

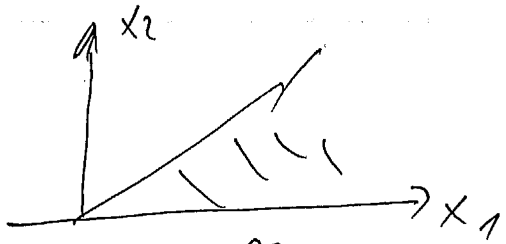
$$= \frac{P(5 < x_1 < 20) \cdots P(5 < x_{10} < 20)}{P(x_1 > 5) \cdots P(x_{10} > 5)} =$$

$$= \frac{\left(e^{-5 \cdot 10} - e^{-20 \cdot 10}\right)^{10}}{\left(e^{-5 \cdot 10}\right)^{10}} = \frac{\left(e^{-50} - e^{-200}\right)^{10}}{e^{-500}} =$$

$$= \left(1 - e^{-150}\right)^{10}$$

ג

$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2}, & x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$



$$P(x_1 > x_2) = \int_0^\infty dx_1 \int_0^{x_1} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2 x_2} \, dx_2$$

$$= \lambda_1 \cancel{\lambda_2} \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1} \frac{1}{-\cancel{\lambda_2}} e^{-\lambda_2 x_2} \Big|_0^{x_1} dx_1 =$$

$$= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-\lambda_1 x_1} (1 - e^{-\lambda_2 x_1}) dx_1 = \lambda_1 \int_0^\infty \left[e^{-\lambda_1 x_1} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}\right] dx_1$$

$$= \lambda_1 \left[-\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 x_1} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}\right] \Big|_0^\infty =$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

5л бкс

(к

$\int_0^3 cx\,dx = 1, \quad \frac{cx^2}{2}\Big|_0^3 = 1, \quad \frac{9}{2}c = 1, \quad \underline{c = \frac{2}{9}}$

$P\left(\sum_{k=1}^{40} X_k < 81\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{40} X_k - \mu 4}{\sigma\sqrt{4}} < \frac{81-\mu 4}{\sigma\sqrt{4}}\right) \approx \Phi\left(\frac{81-\mu 4}{\sigma\sqrt{4}}\right)$

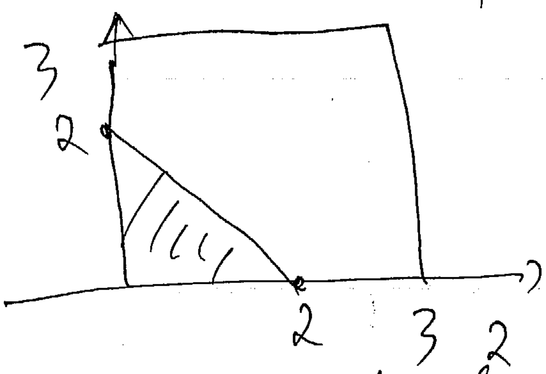
$\mu = E X_k = \int_0^3 \frac{2}{9} x^2 dx = 2, \quad \sigma^2 = Var(X_k) =$

$= \int_0^3 \frac{2}{9} x^3 dx - 2^2 = \frac{1}{18}\cdot 3^4 - 4 = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$p \approx \Phi\left(\frac{81 - 2\cdot 40}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{40}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right) = \Phi(0.22) = \underline{0.587}$

? $P(X_1 + X_2 < 2)$ Е3' (1) б)

$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4}{81} x_1 x_2, & 0 \le x_1, x_2 \le 3 \\ 0, & \text{инак} \end{cases}$



$P(X_1 + X_2 < 2) = \frac{4}{81}\int_0^2 dx_1 \int_0^{2-x_1} x_1 x_2\, dx_2 =$

$= \frac{4}{81}\int_0^2 x_1 \frac{x_2^2}{2}\Big|_0^{2-x_1} dx_1 = \frac{2}{81}\int_0^2 x_1(2-x_1)^2 dx_1 =$

$= \frac{2}{81}\int_0^2 (4x_1 - 4x_1^2 + x_1^3)\,dx_1 = \frac{2}{81}\left(2x_1^2 - \frac{4}{3}x_1^3 + \frac{x_1^4}{4}\right)\Big|_0^2 =$

$= \frac{2}{81}\left(8 - \frac{32}{3} + \cancel{16}\ 4\right) \approx 0.0329$

(2)

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma(X_1 + X_2) = 1}$