אוניברסיטה בן גוריון בנגב
מדור הבחינות

תאריך הבחינה: 30.01.11
שמות המרצים: ל.ברזנסקי, ד"ר שטראוס יוסף
מספר הקורס 201.1.131
שם הקורס תורת ההסתברות 1
שנה: 2010-11; סמסטר:א; מועד:א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות מצורפות
מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4 שאלות מתוך 5</u>
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאל

שאלה 1.

יהי $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx, & 1 \le x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ פונקצית הצפיפות המשותפת של (X,Y).

א) מצא C. $f_X(x)$ 8 נ'

ב) מצא $f_{Y|X}(y|x)$, $E(Y|X=0.5)$. 8 נ'

ג) מצא $F_Z(z)$. כאשר $Z=X+Y$. 9 נ'

שאלה 2.

א) $X \sim U(0,e)$, $Y = |\ln X|$. מצא $f_Y(y)$ 12 נ'

ב) $X \sim \exp(\lambda = 1)$

$$Y = \begin{cases} 0 & 0 < X < 1 \\ X-1 & 1 < X < 2 \\ 2 & X > 2 \end{cases}$$

מצא $F_Y(y)$. 13 נ'

שאלה 3.

בקובייה בפאה אחת כתוב "1", בשתי פאות – "2", ביתר פאות – "3". מטילים קובייה פעמיים. נסמן: X- תוצאה ראשונה, Y- מקסימום בין שתי תוצאות.

א) מצא $f_{X,Y}(x_n, y_m)$. 15 נ'

ב) האם X ו Y בלתי תלויים? בלתי מתואמים? 5 נ'

ג) מצא $E(X|Y \geq 2)$ 5 נ'

שאלה 4.

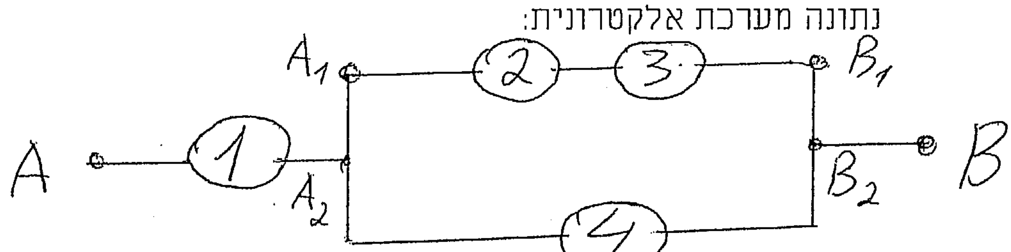
א) נתון $Y \sim N(\mu = 65, \sigma = 10), X \sim N(\mu = 70, \sigma = 5)$.
מצא $p(Y > X)$. 8 נ'

ב) מטילים מטבע 10 פעמים. נסמן X- מספר פעמים שמקבלים "עץ" ב כל 10 הטלות, Y- מספר פעמים שמקבלים "עץ" ב 5 הטלות ראשונות. מצא $\rho(X,Y)$. 8 נ'

ג) נתון: $X_k \sim U(1,3), k = 1,2,\dots,100$ מ"מ בילתי תלוים. מצא מספר a אם ידוע $p(\sum_{k=1}^{100} X_k \leq a) \geq 0.95)$. 9 נ'

שאלה 5.

נתונה מערכת אלקטרונית:



כאשר $k = 1,2,3,4, X_k \sim \exp(\lambda = 1)$. מצא

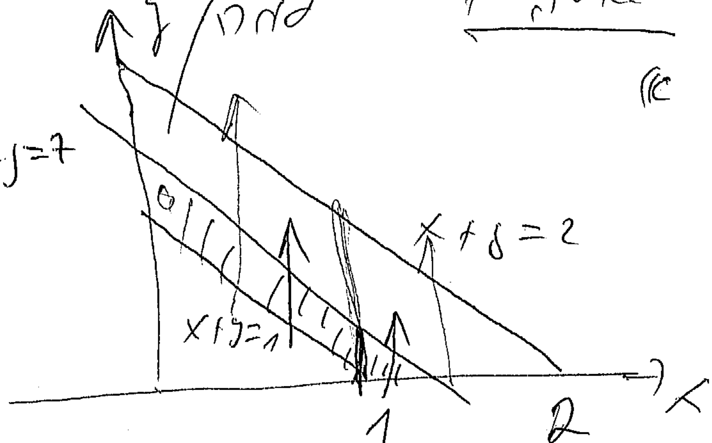
א) $EX_{AB}, F_{X_{AB}}(t)$. 10 נ'

ב) $p(X_{A_1 B_1} > X_4)$. 8 נ'

ג) $p(X_{AB} > 3 | X_1 > 2)$ 7 נ'

בהצלחה!

שאלה 1



$c \iint_D x\,dx\,dy = 1$, $\quad c\left[\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} x\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} x\,dy\right]$

$= c\left[\int_0^1 xy\Big|_{1-x}^{2-x} dx + \int_1^2 xy\Big|_0^{2-x} dx\right] =$

$= c\left[\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx\right] =$

$= c\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2\right] = c\left[\frac{1}{2} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right]$

$= c\left[\frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3}\right] = c\,\frac{3+18-14}{6} = c\,\frac{7}{6} = 1,$

$c = \frac{6}{7}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \cancel{0} & \cancel{x<0} \\ \frac{6}{7}x & 0<x<1 \\ \frac{6}{7}x(2-x) & 1<x<2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

1) $0<x<1$ $\quad \frac{6}{7}\int_{1-y}^{2-y} x\,dy = \frac{6}{7}xy\Big|_{1-x}^{2-x} = \frac{6}{7}x$

2) $1<x<2$ $\quad \frac{6}{7}\int_0^{2-x} x\,dy = \frac{6}{7}xy\Big|_0^{2-x} = \frac{6}{7}x(2-x)$

~~[illegible]~~

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$$

1) $0<x<1$ $\quad f_{y|x}(y|x) = \begin{cases} 1, & 1-x<y<2-x \\ 0, & \text{инак} \end{cases}$

2) $1<x<2$ $\quad f_{y|x}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & 0<y<2-x \\ 0, & \text{инак} \end{cases}$

$$f_{y|x}\left(y|x=\tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1, & 1/2<y<3/2 \\ 0, & \text{инак} \end{cases}$$

$$E(Y|X=1/2) = \int_{1/2}^{3/2} y\cdot 1\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{1/2}^{3/2} = \frac{9}{8}-\frac{1}{8} = 1$$

(Z

$$Z = X+Y$$

$$F_Z(z) = P(X+Y\le z) = \begin{cases} 0, & z<1 \\ \frac{z^3-1}{7}, & 1\le z<2 \\ 1, & z\ge 2 \end{cases}$$

$$\iint_{D_z} \frac{6}{7}x\,dx\,dy = \frac{6}{7}\left[\int_0^1 dx\int_{1-x}^{z-x} x\,dy + \int_1^z dx\int_0^{z-x} x\,dy\right] =$$

$$= \frac{6}{7}\left[\int_0^1 dx\left(xy\Big|_{1-x}^{z-x}\right) + \int_1^z dx\left(xy\Big|_0^{z-x}\right)\right] =$$

$$= \frac{6}{7}\left(\int_0^1 x(z-1)\,dx + \int_1^z x(z-x)\,dx\right) = \frac{6}{7}\left[(z-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \right.$$

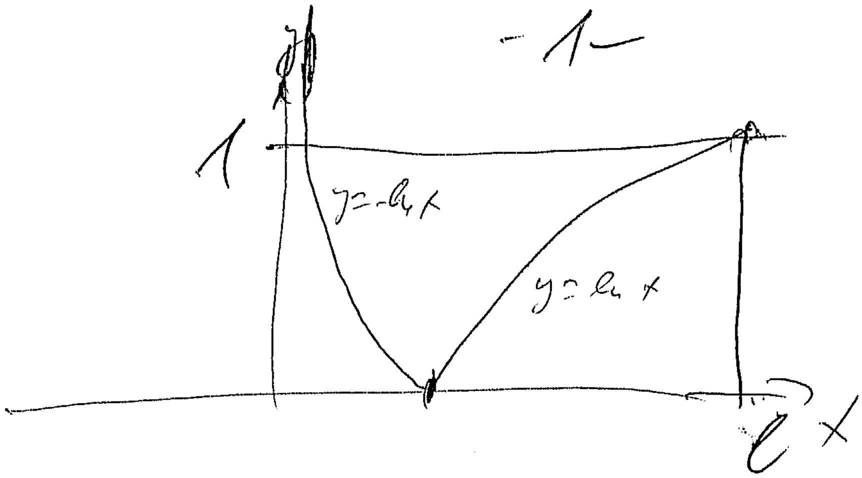
$$\left. + \left(z\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^z\right] = \frac{6}{7}\left[\frac{1}{2}(z-1) + \left(\frac{z^3}{2}-\frac{z^3}{3}\right) - \left(\frac{z}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{6}{7}\left[\frac{z^3}{6}-\frac{1}{6}\right] = \frac{z^3-1}{7}$$

-1-

Zadtke

(4



$h_1(y) = e^{-y}, \quad h_2(y) = e^{y}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{y} + e^{-y}}{e} & 0 < y < 1 \\ \frac{e^{-y}}{e} & y > 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & 0 < x < e \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

1) $0 < y < 1$

$$f_Y(y) = f_X(h_1(y)) \cdot |h_1'(y)| + f_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)| =$$

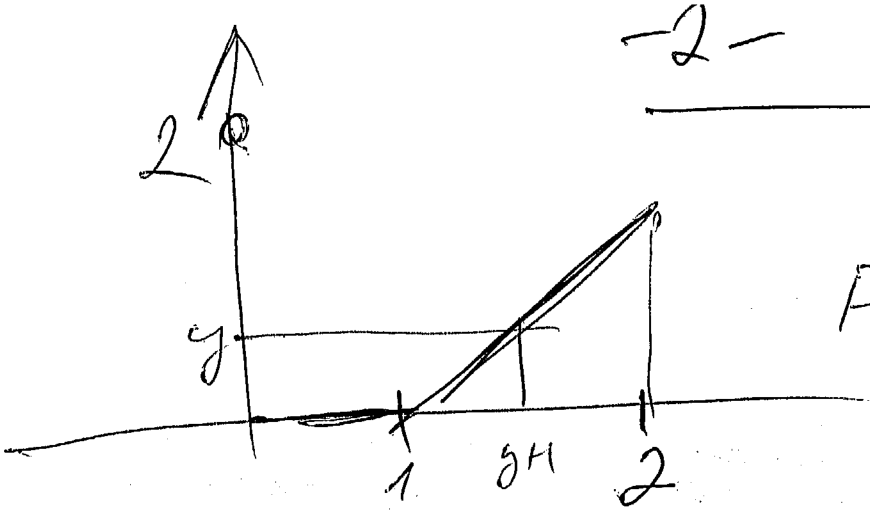
$$= \frac{1}{e} \left[e^{-y} + e^{y} \right],$$

2) $y > 1.$

$$f_Y(y) = f_X(h_1(y)) \cdot |h_1'(y)| = \frac{e^{-y}}{e}$$

-2-

(a)



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 1-e^{-(y+1)} & 0 \leq y < 1 \\ 1-e^{-2} & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

1) $\underline{0 \leq y < 1}$

$$F_Y(y) = P(Y<0) + P(Y=0) + P(0<Y<y) =$$
$$= P(0<X<1) + P(1<X<y+1)$$
$$= \cancel{F_X(1)} - F_X(0) + F_X(y+1) - \cancel{F_X(1)} = 1-e^{-(y+1)}$$

2) $1 \leq y < 2$

$$F_Y(y) = F_Y(1-) + \overbrace{P(Y=1)}^{=0} + \overbrace{P(1<Y\leq y)}^{=0} =$$
$$= \cancel{pe}\ F_Y(1-) = 1-e^{-2}$$

(c $3,8\,ce$

$X \backslash Y$	1	2	3	$f_X(x)$
1	$1/36$	$1/18$	$1/12$	$6/36 = \frac{1}{6}$
2	0	$3/18$	$1/6$	$12/36 = \frac{2}{6}$
3	0	0	$\frac{6}{12}$	$18/36 = \frac{3}{6}$
$f_Y(y)$	$1/36$	$4/18$	$9/12$	$\Sigma = 1$

$$0 = f_{X,Y}(2,1) \neq f_X(2) \cdot f_Y(1)$$ (a

[illegible] Y ! X 5c

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{36} + \frac{2}{18} + \frac{3}{12} + \frac{6}{18} + \frac{2}{6} + \frac{54}{12}$$

$$- \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6}\right)\left(\frac{1}{36} + \frac{8}{18} + \frac{18}{18}\right) = \frac{191}{36} - \frac{14}{6} \cdot \frac{53}{36} \neq 0$$

(c

$X \mid Y \geq 2$	1	2	3
$f_{X \mid Y \geq 2}$	$\frac{5}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$

$$P(X=1 \mid Y \geq 2) = \frac{P(X=1, Y \geq 2)}{P(Y \geq 2)} = \frac{\frac{1}{18} + \frac{1}{12}}{\frac{4}{18} + \frac{9}{12}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

$$P(X=2 \mid Y \geq 2) = \frac{P(X=2, Y \geq 2)}{P(Y \geq 2)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{18} + \frac{9}{12}} = \frac{12}{35}$$

$$E(X \mid Y \geq 2) = \frac{5}{35} + 2 \cdot \frac{12}{35} + 3 \cdot \frac{18}{35} =$$

$$= \frac{5 + 24 + 54}{35} = \frac{83}{35} = 2\frac{13}{35}$$

4 задаче

$p((X-Y) < x) - ?$

$X-Y \sim N(\mu = 5, \sigma = \sqrt{125})$

$p(X-Y \leq x) = p\left(\frac{X-Y-\mu}{\sigma} < \frac{0-\mu}{\sigma}\right) =$

$= \varphi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \varphi\left(-\frac{5}{5\sqrt{5}}\right) = \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) =$

$= \varphi(-0.447) = 0.319$

$X \sim B(n=10, p=\tfrac{1}{2}), \quad Y \sim B(n=5, p=1/2)$

$X-Y \sim B(n=5, p=\tfrac{1}{2})$

$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,cov(X,Y)$

$\cancel{100}\ 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2\,cov(X,Y)$

$cov(X,Y) = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\mu = EX_k = 2, \quad \sigma = \sqrt{Var(X_k)} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$p\left(\sum_{k=1}^{100} X_k \leq a\right) = p\left(\frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - \mu \cdot n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{a - \mu n}{\sigma \sqrt{n}}\right) \approx$

$\varphi\left(\frac{a - 2 \cdot 100}{10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \geq 0.95 \Rightarrow$

$\frac{a-200}{\frac{10}{\sqrt{3}}} \geq 1.65, \quad a \geq 200 + \frac{16.5}{\sqrt{3}} \approx$

≈ 209.5

5.1 Бке

$$F_{X_k}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1-e^{-t}, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$X_{AB} = \min\{X_1, \max\{X_4, \min\{X_2, X_3\}\}\} \quad (б$$

$$F_{X_{AB}}(t) = 1-(1-F_{X_1}(t))[1-F_{X_4}(t)\cdot(1-(1-F_{X_2}(t))(1-F_{X_3}(t)))]$$

$$= 1-e^{-t}[1-(1-e^{-t})(1-e^{-2t})] =$$

$$= 1-e^{-t}(\cancel{1-1}+e^{-2t}+e^{-t}-e^{-3t}) =$$

$$= 1-e^{-3t}-e^{-2t}+e^{-4t}$$

$$EX_{AB} = \int_0^\infty [1-F_{X_{AB}}(t)]dt = \int_0^\infty (e^{-3t}+e^{-2t}-e^{-4t})dt$$

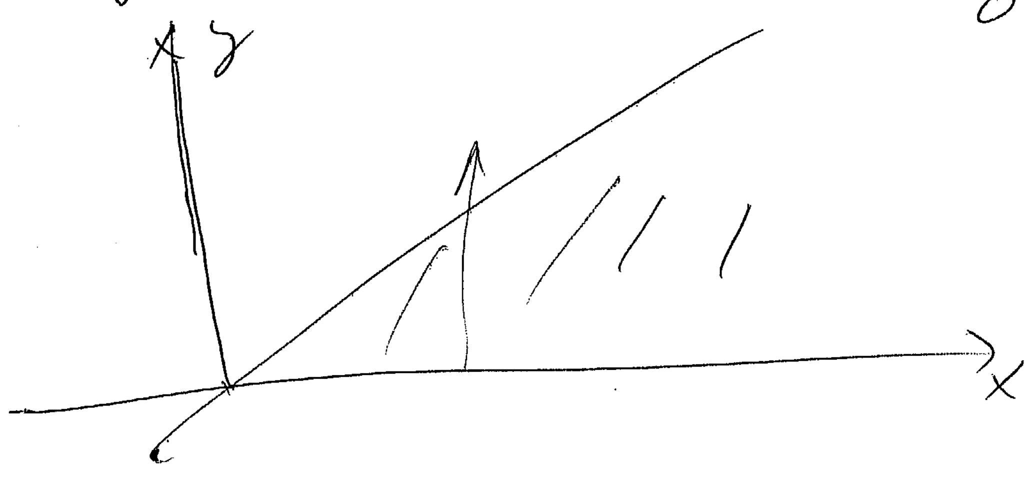
$$= \left(-\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-4t}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

(а

$$F_{X_{A_1B_1}}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1-e^{-2t}, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$y = X_4, \quad X = X_{A_1B_1}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2x}\cdot e^{-y}, & x \ge 0, \ y \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



$$P(X>Y) = 2\int_0^\infty dx \int_0^x e^{-2x} e^{-y}\, dy =$$

$$= 2\int_0^\infty dx \left(-e^{-2x} e^{-y}\right)\Big|_0^x = 2\int_0^\infty \left[e^{-2x} - e^{-3x}\right] dx =$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x}\right]\Big|_0^\infty = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(2

$$P(X_{AB}>3 \mid X_1>2) = \frac{P(X_{AB}>3,\ X_1>2)}{P(X_1>2)} =$$

$$= \frac{P(X_1>3,\ X_{A_2B_2}>3,\ X_1>2)}{P(X_1>2)} =$$

$$= \frac{P(X_1>3)\ P(X_{A_2B_2}>3)}{P(X_1>2)} = \frac{(1-F_{X_1}(3))(1-F_{X_{A_2B_2}}(3))}{1-F_{X_1}(2)}$$

$$F_{X_1}(t) = 1-e^{-t}, \quad t \geq 0$$

$$F_{X_{A_2B_2}}(t) = F_{X_4}(t)\cdot\left[1-(1-F_{X_2}(t))(1-F_{X_3}(t))\right] =$$

$$= (1-e^{-t})(1-e^{-2t}) = 1-e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}$$

$$P = \frac{e^{-3}\left(e^{3}+e^{-6}-e^{-9}\right)}{e^{-2}} = e^{-4}+e^{-7}-e^{-10}$$