אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

תאריך הבחינה: 06.05.2011
שם המורה:ל.ברזנסקי
מספר הקורס:201.1.131
שם הקורס:תורת ההסתברות 1
שנה: שניה; סמסטר:א; מועד:ג
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות מודפס נתון,
מחשב כיס עם מסך קטן.

יש לענות על 4 שאלות מתוך 5
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאלה.

שאלה 1.

נתון $X\sim U(1,2), Y\sim U(1,2)$, מ"מ X ו-Y בילתי-תלוים.

א) מצא פונקציה צפיפות של Z=X-Y. 10נ
ב) מצא את $E\left(\sqrt{X+Y}\right)$. 8נ
ג) מצא את $P(XY\geq 2)$. 7נ

שאלה 2.

נתון: $X\sim U(-3,3)$,

$$Y=\begin{cases} X+2, & -2\leq X\leq -1, \\ 2, & -1<x<1 \\ 2-X, & 1\leq X\leq 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

א)מצא פונקצית התפלגות $F_Y(y)$. 10נ
ב) מצא פונקצית צפיפות של $Z=X^2$. 9נ
ג) מצא $P(Y\geq X)$.(תשתמש בגרף של הפונקציה $y=g(x)$). 6נ

שאלה 3.

שני אנשים משחקים במשחק הבא: הראשון מטיל מטבע. אם הוא מקבל "ראש" אז הוא מצליח במשחק.
אחרת השני מטיל מטבע. אם הוא מקבל "ראש" אז הוא מצליח.
אחרת חוזרים להתחלת המשחק.
נסמן X- מספר הטלות המטבע של שחקן הראשון בסוף המשחק,
Y- מספר הטלות המטבע של שחקן השני גם בסוף המשחק.

א) מצא פונקציה הסתברות משותפת של X ו-Y (טבלה אינסופית) . מצא פונקציה הסתברות של X, פונקציה הסתברות של Y ובדוק התשובה. נ 12

ב) מצא הסתברות ששחקן הראשון יצליח במשחק. נ 7

ג) שני אנשים משחקים באותו משחק אבל בתנאי הנוסף, שכל אחד מטיל מטבע לא יותר משתי פעמים. מצא פונקציה הסתברות המשותפת של X ו-Y במשחק החדש. (טבלה סופית) נ 6

<u>שאלה 4.</u>

בשאלה אין קשר בין הסעיפים.

א) בן אדם מטיל קובייה ואחר' זה מטיל מטבע מספר פעמים שכתוב בקובייה.
מצא תוחלת של מספר הראשים בהטלת המטבע. נ 9

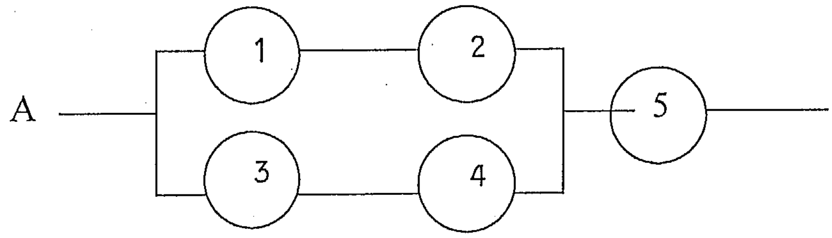
ב) בהטלת הקובייה n- פעמים נסמן X- מספר הפעמים שמקבלים מספר "1", Y- מספר הפעמים שמקבלים מספר זוגי. מצא $Cov(X,Y)$. נ 8

ג) בן אדם מטיל קובייה עד שהוא יקבל כל המספרים של הקוביה. מצא תוחלת של מספר הטלות הקובייה. נ 8

<u>שאלה 5.</u>

בשאלה אין קשר בין הסעיפים.

א) נתונה מערכת אלקטרונית לפי קונפיגורציה הבאה



זמן החיים של כל אחד מהאלמנטים 1-5 מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.
כל האלמנטים בילתי-תלוים.
נסמן ב- X_{AB} זמן החיים של כל המערכת .
מצא $F_{X_{AB}}(t)$, EX_{AB} . נ 12

ב) במערכת חדשה יש רק אלמנט אחד, וזמן החיים שלו מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda=1$. בתקלה מחליפים האלמנט מיד. מה מספר מינימלי של האלמנטים צריך להשאיר במלי כך שעם הסתברות לא קטנה מ 0.95 אפשר לספק עבודה רציפה של המערכת בתוך 100 שעות? נ 8

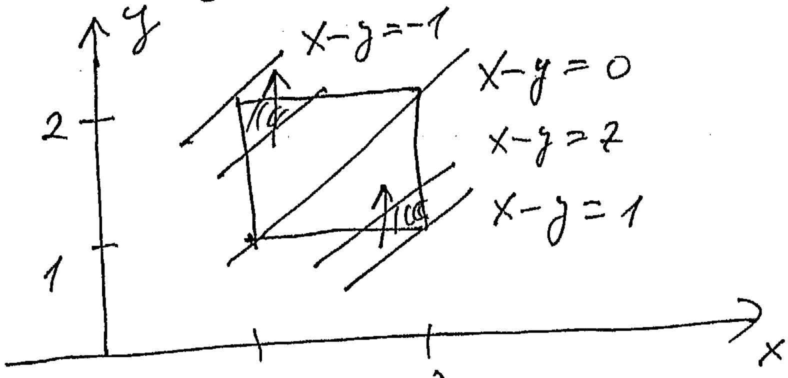
ג) יש שני אלמנטים. ידוע, שאלמנט הראשון הוא תקין והשני תקין עם הסתברות 0.5. אם אלמנט תקין אז זמן החיים שלו מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda=1$. מצא $P(X_1>X_2)$, כאשר X_i- זמן החיים של האלמנט i . נ 5

<u>בהצלחה!</u>

06. 05. 2011

1 и бке

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1, & 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\\ 0, & \text{[illegible]}\end{cases}$$



(1c

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le -1\\ \dfrac{(1+z)^2}{2}, & -1\le z\le 0\\ 1-\dfrac{(1-z)^2}{2}, & 0\le z\le 1\\ 1, & z\geq 1\end{cases}$$

1) $-1 \le z \le 0$ $\quad F_Z(z)=\iint_{D_z} 1\,dx\,dy = \int_1^{2+z} dx \int_{x-z}^{2} dy =$

$= \dfrac{(1+z)^2}{2}$

2) $0 \le z \le 1$ $\quad F_Z(z) = \iint_{D_z} 1\,dx\,dy = 1 - \iint_{\overline{D_z}} dx\,dy =$

$= 1 - \int_{1+z}^{2} dx \int_1^{x-z} dy = 1 - \dfrac{(1-z)^2}{2}$

(2

$$E(\sqrt{x+y}) = \iint_D \sqrt{x+y}\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_1^2 \sqrt{x+y}\,dy =$$

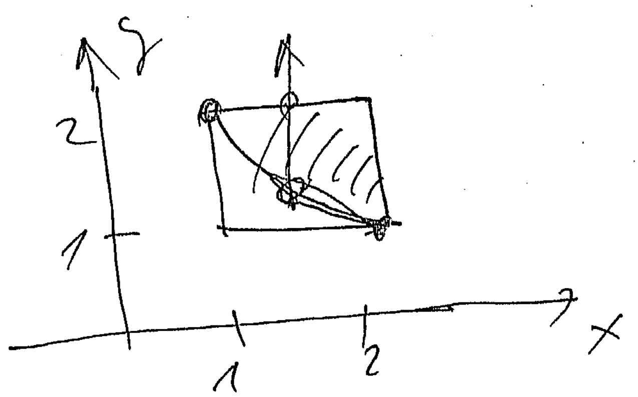
$$= \int_1^2 \frac{2}{3}(x+y)^{3/2}\Big|_1^2 dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \left[(2+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\right] dx =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[(2+x)^{5/2} - (1+x)^{5/2}\right]\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\left[\left(4^{5/2}-3^{5/2}\right)-\left(3^{5/2}-2^{5/2}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{15}\left[\left(4^{5/2}-3^{5/2}\right)\right.$$

(c



$$y = \frac{2}{x}$$

$$P\left(Y > \frac{2}{X}\right) = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{2/x}^{2} dy =$$

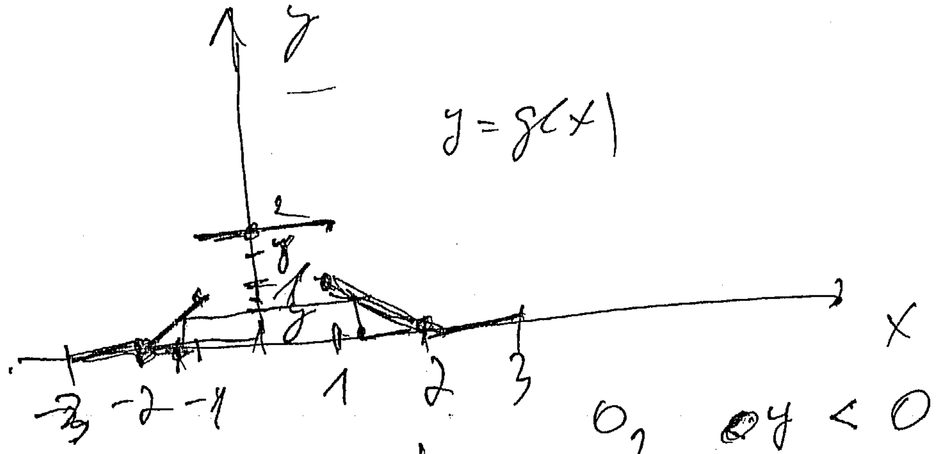
$$= \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{x}\right) dx = \left(2x - 2\ln|x|\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(2\cdot 2 - 2\ln 2\right) - 2 = \underline{2 - 2\ln 2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{x+3}{6}, & -3 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

2лбкс

(c



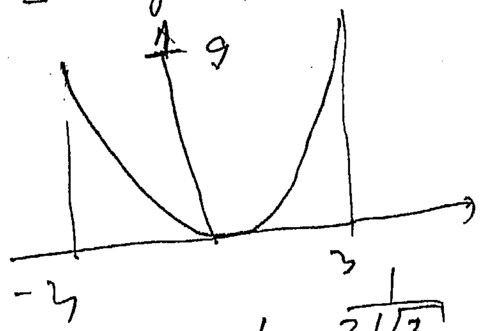
$$y = g(x)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y+1}{3}, & 0 \le y < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \le y < 2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases}$$

1) $0 \le y < 1$, $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y=0) + P(0 < Y < y) = P(-3<X<-2) + P(2<X<3) + P(-2<X<y-2) + P(2-y<X<2) = P(-3<X<y-2) + P(2-y<X<3) = F_X(y-2) - F_X(-3) + F_X(3) - F_X(2-y) = \frac{y+1}{6} + 1 - \frac{5-y}{6} = \frac{y+1+6-5+y}{6} = \frac{2y+2}{6} = \frac{y+1}{3}$

2) $1 \le y < 2$

$F_Y(y) = F_Y(1) + P(1 < Y \le y) = F_Y(1) = \frac{2}{3}$



(2

$z = x^2, \quad x = \pm\sqrt{z}$

$h_1(z) = -\sqrt{z}, \quad h_2(z) = \sqrt{z}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{z}}, & 0 < z < 9 \\ 0, & \text{инак} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = f_X(h_1(z)) \cdot |h_1'(z)| + f_X(h_2(z)) \cdot |h_2'(z)| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{6\sqrt{z}}$$

$P(Y \ge X) = P(-3 < X < 1) =$ (2

$= F_X(1) - F_X(-3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3 дбкс / (К

X \ Y	0	1	2	...	n-1	n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	...	0	0
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	...	0
3						
⋮	-	-	-	-	-	-
n	0	0 ..	0	$\frac{1}{2^{2n-1}}$		$\frac{1}{2^{2n}}$

$f_{X,Y}(n, n-1) = \frac{1}{2^{2n-1}}, \quad f_{X,Y}(x=n, y=n) = \frac{1}{2^{2n}}$

$f_{X,Y}(k, m) = 0$ инак

$$f_X(n) = \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2n}} = \frac{3}{2^{2n}} = 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_X(n) = 3\,\frac{1/4}{1-1/4} = 1$$

$$f_Y(n) = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n=1,2,\ldots$$

$$f_Y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_Y(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{1/4}{1-1/4} = 1$$

ב)

נסמן p - הסתברות [illegible], מדלג, q - הסתברות [illegible] מדלגים

$$p+q=1, \quad q = \frac{1}{2}p \Rightarrow p + \frac{1}{2}p = 1,$$

$$p = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{1}{3}$$

ג)

$x \backslash y$	0	1	2
1	1/2	1/4	0
2	0	1/8	1/8

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

$X\sim B(n,p) \Rightarrow EX = n\cdot p$, $p=\frac{1}{2}$, $n=1,2,\dots,6$ לכל

ב)

$$EX = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} + \dots + 6\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{12}$$

X_k - מספר הפעמים שיצא (מס') ג)

מספר K, $K=1,\dots,6$

$$Cov(X,Y) = Cov(X_1, X_2+X_4+X_6) =$$

$$= Cov(X_1,X_2) + Cov(X_1,X_4) + Cov(X_1,X_6)$$

$X_1\sim B(n, p=\frac{1}{6})$, $X_2\sim B(n, p=\frac{1}{6})$,

$X_1+X_2 \sim B(n, p=\frac{1}{3}) \Rightarrow$

$$Var(X_1+X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1,X_2):$$

$$n\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = 2\cdot n\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + 2\,Cov(X_1,X_2)$$

$$Cov(X_1,X_2) = \frac{n}{9} - \frac{5n}{36} = -\frac{n}{36}$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = 3\left(-\frac{n}{36}\right) = -\frac{n}{12}$$

$E(Y) = \frac{1}{p} \Leftarrow Y\sim G(p)$ ד)

$$EX = 1 + \frac{1}{\frac{5}{6}} + \frac{1}{\frac{4}{6}} + \frac{1}{\frac{3}{6}} + \frac{1}{\frac{2}{6}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} =$$

$$= 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + 6$$

5 поени
(С

$X_{AB} = \min\langle X_5, \max\langle \min\langle X_1, X_2\rangle, \min\langle X_3, X_4\rangle\rangle\rangle$

$F_{X_{AB}}(t) = 1 - (1 - F_{X_5}(t))(1 - F_{\min\langle X_1, X_2\rangle}(t) \cdot F_{\min\langle X_3, X_4\rangle}(t)) =$

$= 1 - e^{-\lambda t}(1 - (1 - e^{-2\lambda t})(1 - e^{-2\lambda t})) =$

$= 1 - 2e^{-3\lambda t} + e^{-5\lambda t}$

$F_{X_{AB}}(t) = \int_0^\infty (1 - F_{X_{AB}}(t))\,dt = \int_0^\infty (2e^{-4\lambda t} - e^{-6\lambda t})\,dt$

$= \left(-\frac{2}{3\lambda}e^{-3\lambda t} + \frac{1}{5\lambda}e^{-5\lambda t}\right)\Big|_0^\infty =$

$= \frac{2}{3\lambda} - \frac{1}{5\lambda} = \frac{7}{15\lambda}$

$X_k \sim exp(\lambda = 1)$, k [illegible] X_k [illegible] (2

$p\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 100\right) \geq 0.95$, $p\left(\frac{\sum X_k - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{100 - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$

$\mu = \sigma = 1 \Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{100 - n}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$

$\Phi\left(\frac{100-n}{\sqrt{n}}\right) \leq 0.05$, $\frac{100-n}{\sqrt{n}} \leq -1.65$

$n + 1.65\sqrt{n} - 100 \geq 0$, $\sqrt{n} = t$

$t^2 + 1.65t - 100 = 0$, $t = 10.85$

$\sqrt{n} \geq (10.8)^2 \Rightarrow$ ~~10.82~~ $n \geq 118$

(2

$p(X_1 > X_2) = p(X_2 = 0) + p(X_2 \neq 0) \cdot p(X_1 > X_2) =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$