עם פתרונות

אוניברסיטה בן גוריון בנגב
מדור הבחינות

תאריך הבחינה 26.01.10
שם המורה ל.ברזנסקי, ארתור יוסף
מספר הקורס 201.1.131
שם הקורס תורת ההסתברות 1
שנה: ב; סמסטר:א; מועד:א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפי נוסחאות מצורפות
מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4 שאלות מתוך 5</u>
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאל

<u>שאלה 1.</u>

יהי $G=\{(x,y): 0\le y\le 1, 2y-x\le 2, 2y+x\le 2\}$.

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} C, & (x,y)\in G, \\ 0, & else \end{cases}$.

א) מצא C. (4 נ')

ב) מצא $f_X(x)$, $f_y(y)$. (8 נ')

ג) נסמן $Z=Y-X$. מצא $F_Z(z)$. (8 נ')

ד) מצא: $f_{X|Y}(x|0.5)$, $E(X|Y=0.5)$. (5 נ')

<u>שאלה 2.</u>

נתונה פונקציה הסתברות של מ"מ X

X	-2	-1	0	1	2
$f_X(x_k)$	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

א) $Y=X^2-1$. מצא $f_{X,Y}(x_k,y_j)$. האם המשתנים בלתי תלוים?, בלתי מתואמים? (8 נ')

ב) $Z=2X+1$. מצא $Cov(Y,Z)$? (9 נ')

ג) $V=\begin{cases} X, & X\le 0 \\ Y, & X>0 \end{cases}$. מצא $f_V(v_k)$ (8 נ')

<u>שאלה 3.</u>

נתון $X\sim U(-1,3)$, $Y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $Z=\begin{cases} -X, & X<0 \\ 2X, & 0<X<1, \\ 0 & othewise \end{cases}$

א) מצא $f_Y(y)$. (9 נ')

ב) מצא $F_Z(z)$. (9 נ')

ג) חשב $E\left(\frac{X}{X+Y}\right)$. (7 נ')

שאלה 4.

אין קשר בין סעיפים.

א) מ"מ $X_k \sim \exp(\lambda=5)$ בילתי תלוים. מצא מספר שלם a מקסימלי כך,ש $p\left(\sum_{k=1}^{100} X_k > a\right) \geq 0.9$ (9 נ')

ב) $Y \sim U(0,3), X \sim U(1,3)$, מ"מ בלתי תלוים. מצא $E(\max\{X,Y\})$ (8 נ')

ג) מטילים קוביה 4 פעמים. נסמן: X-מספר תוצאות "1" בכל 4 הטלות, Y- מספר תותאות "1" ב 3 הטלות ראשונות. מצא $Cov(X,Y)$. (8 נ')

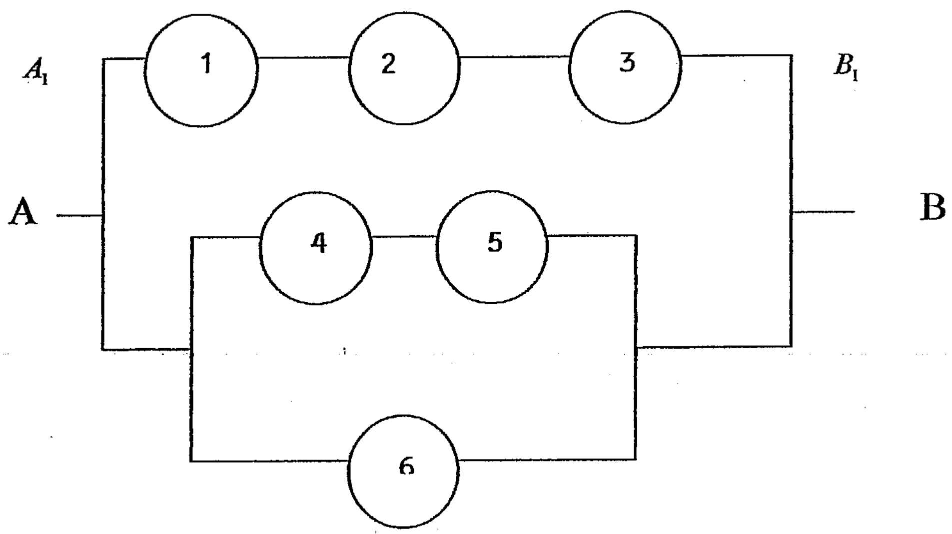
שאלה 5.

נתונה מערכת אלקטרונית . זמן חיים של כל אלמנט $X_i \sim \exp(\lambda=1)$ (בשעות) . אלמנטים בלתי תלוים.

א) מצא $F_{X_{AB}}(t)$, $E(X_{AB})$, כאשר X_{AB}- זמן החיים של המערכת. (9 נ')

ב) מה הסתברות שמערכת תעבוד בלי תקלה לכל היותר שעתיים, אם ידוע , שחלק A_1B_1 כבר עובד בלי תקלה שעה. (8 נ')

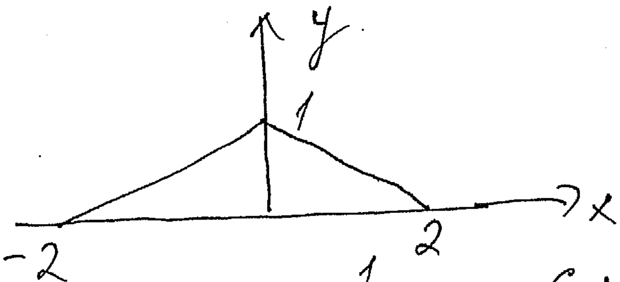
ג) מה הסתברות שחלק A_1B_1 יעבוד יותר זמן מהאלמנט 6 . (8 נ')



הצלחה

26/11/14

1 נקודה



$$c=\frac{1}{2}\ ,\quad c\cdot\frac{4\cdot 1}{2}=1$$ (א

(ב

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{4}, & -2<x<0\\ \frac{2-x}{4}, & 0<x<2\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

1) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+2}{2}} dy=\frac{x+2}{4}$, 2) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2-x}{2}} dy=\frac{2-x}{4}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{2}\int_{2y-2}^{2-2y} dx=\frac{1}{2}(4-4y)$$ (ג

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-2\\ \frac{(z+2)^2}{12}, & -2\le z<1\\ 1-\frac{1}{4}(2-z)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\geq 2\end{cases}$$

1) $\underline{z<1}$ $\quad F_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{z+2}{3}}dy\int_{y-z}^{2-2y}dx=\frac{(z+2)^2}{12}$

2) $1\le z<2$

$$F_Z(z)=1-\frac{1}{2}\int_0^{2-z}dy\int_{2y-2}^{y-z}dx=1-\frac{1}{4}(2-z)^2$$

(ד

$$f_{X|Y}(x|0.5)=\frac{f_{XY}(x,0.5)}{f_Y(0.5)}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$E(X|Y=0.5)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{2}dx=0$$

שאלה 2

א)

$X \backslash Y$	-1	0	3	$f_X(x_k)$
-2	0	0	0.2	0.2
-1	0	0.1	0	0.1
0	0.2	0	0	0.2
1	0	0.3	0	0.3
2	0	0	0.2	0.2
$f_Y(y_j)$	0.2	0.4	0.4	$\Sigma = 1$

$$P(X=-2, Y=-1) = 0 \neq P(X=-2)\cdot P(Y=-1)$$

אז X ו-Y תלויים

$$\operatorname{cov}(X,Y) = -2\cdot 3\cdot 0.2 + 2\cdot 3\cdot 0.2 - EX\cdot EY =$$

$$= -0.2 \implies$$ X ו-Y מתואמים

ב)

$$\operatorname{cov}(Y,Z) = \operatorname{cov}(Y, 2X+1) =$$

$$= 2\operatorname{cov}(Y,X) = -0.4$$

ג)

V	-2	-1	0	3
$f_V(v_k)$	0.2	0.1	0.5	0.2

לכן נקבל:

$$P(V=0) = P(X\leq 0)\, P(X=0 \mid X\geq 0) +$$

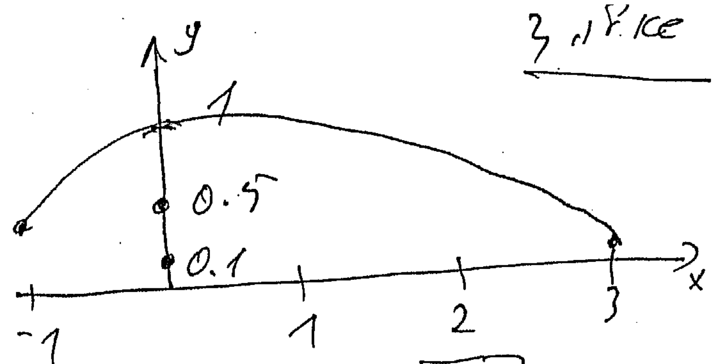
$$+ P(X>0)\cdot P(Y=0 \mid X>0) =$$

$$= \cancel{P(X\leq 0)}\cdot \frac{P(X=0,\ X\geq 0)}{\cancel{P(X\geq 0)}} + \cancel{P(X>0)}\cdot \frac{P(Y=0,\ X\geq 0)}{\cancel{P(X>0)}}$$

$$= 0.2 + 0.3 = 0.5$$

3 ,1Y.KE

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -1 < x < 3 \\ 0 & ,\text{n)hk} \end{cases}$$



(k

$x^2+1 = \frac{1}{y}$, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{y}-1}$, $h_1 = -\sqrt{\frac{1}{y}-1}$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{y}-1}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8\sqrt{y^3-y^4}} , & 0.1 < y < 0.5 \\ \frac{1}{4\sqrt{y^3-y^4}} , & 0.5 < y < 1 \\ 0 , & \text{o)hk} \end{cases}$$

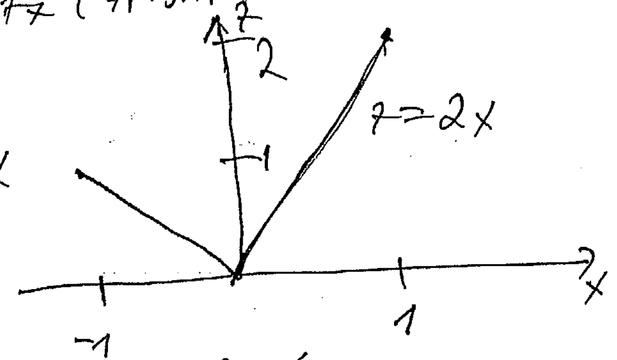
1) $0.1 < y < 0.5$ $f_Y(y) = f_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)| =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{y}-1}} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{8\sqrt{y^3-y^4}}$

2) $0.5 < y < 1$, $f_Y(y) = f_X(h_1(y))|h_1'(y)| + f_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)|$

(∂

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 , & x \le -1 \\ \frac{x+1}{4} , & -1 \le x < 3 \\ 1 , & x \geq 3 \end{cases}$$



$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 , & z < 0 \\ \frac{3z+4}{8} , & 0 \le z < 1 \\ \frac{z+6}{8} , & 1 \le z < 2 \\ 1 , & z \geq 2 \end{cases}$$

1) $0 \le z < 1$

$F_Z(z) = P(Z=0) + P(0 < Z < z) =$

$= P(1 < X < 3) + P(-z < X < \frac{z}{2}) = \frac{3z+4}{8}$

2) $1 \leq z < 2$

$$F_Z(z) = F_Z(1) + P(1 < Z < z) =$$

$$= \frac{7}{8} + P\left(1/2 < X < \frac{z}{2}\right) = \frac{7+6}{8}$$

$$E\left(\frac{X}{X+2}\right) = \int_{-1}^{3} \frac{x+2-2}{x+2} \cdot \frac{1}{4}\, dx =$$ (2

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{3}\left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = \frac{1}{4}\left(x - 0.5 \ln |x+2|\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \frac{1}{4}(2 - 0.5 \ln 5)$$

$\le$ [illegible]

$$P\left(\sum_{k=1}^{100} X_k > a\right) = P\left(\frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - \mu\cdot 100}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{a-\mu\cdot 100}{\sigma\sqrt{100}}\right)$$ (ג

$$\approx P\left(Z > \frac{a-\mu\cdot 100}{\sigma\sqrt{100}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{a-\mu\cdot 100}{10\sigma}\right) \ge 0.9$$

$$\Phi\left(\frac{a-\mu\cdot 100}{\sigma\cdot 10}\right) \le 0.1 \qquad \mu=\frac{1}{\lambda}=0.2,\ \sigma=\frac{1}{\lambda}=0.2$$

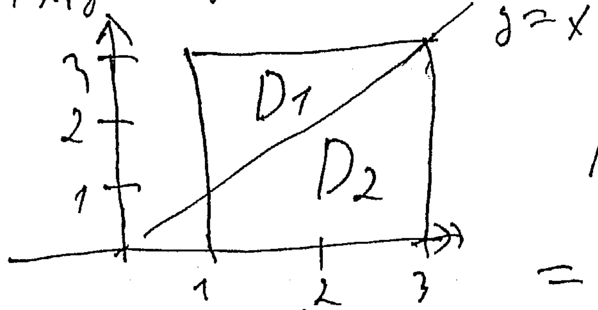
$$\Phi(t)=0.1,\quad t=-1.28$$

$$\frac{a-20}{0.2\cdot 10} \le -1.28,\quad \underline{a\le 17.46} \qquad \underline{a=17}$$

(ד

$$f_X(x)=\frac{1}{2},\ 1\le x\le 3,\qquad f_Y(y)=\frac{1}{3},\ 0<y<3 \Rightarrow$$

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 1<x<3,\ 0<y<3\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$



$$E(\max\{X,Y\})=\frac{1}{6}\iint_D \max\{x,y\}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{6}\iint_{D_1} y\,dx\,dy+\frac{1}{6}\iint_{D_2} x\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{6}\int_1^3 dx\int_x^3 y\,dy+\frac{1}{6}\int_1^3 dx\int_0^x x\,dy=\frac{1}{6}\int_1^3\left(\frac{9}{2}+\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{20}{9}$$

ה) נסמן Z - מספר הופעות "1" בניסוי רביעי.

$$X=Z+Y$$

$$Cov(Y+Z,Y)=Cov(Y,Y)+\underbrace{Cov(Z,Y)}_{=0}=$$

$$=Var(Y)=n\cdot p\cdot(1-p)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$$

$$Y\sim B\left(n=3,\ p=\frac{1}{6}\right)$$

5лдке

$X_{AB} = \max\{\min\{X_1, X_2, X_3\}, \min\{X_4, X_5\}, X_6\}$ c

$F_{X_{AB}}(t) = (1-e^{-3t})(1-e^{-2t})(1-e^{-t}) =$

$= 1 - e^{-t} - e^{-2t} + e^{-4t} + e^{-5t} - e^{-6t}, \quad t \geq 0$

$E X_{AB} = \int_0^\infty [1 - F_{X_{AB}}(t)]\,dt = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \approx 1.22$

d

$P(X_{AB} \leq 2 \mid X_{A_1B_1} > 1) = \dfrac{P(X_{AB} \leq 2,\ X_{A_1B_1} > 1)}{P(X_{A_1B_1} > 1)} =$

$= \dfrac{P(X_{A_1B_1} \leq 2,\ X_{A_2B_2} \leq 2,\ X_{A_1B_1} > 1)}{P(X_{A_1B_1} > 1)} =$

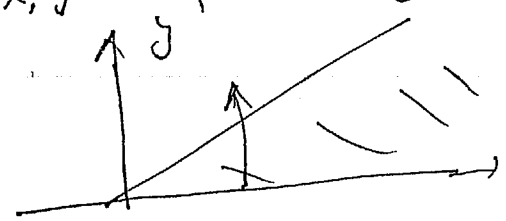
$= \dfrac{P(1 < X_{A_1B_1} < 2) \cdot P(X_{A_2B_2} < 2)}{P(X_{A_1B_1} > 1)} =$

$= \dfrac{(e^{-3} - e^{-6})(1 - e^{-4})(1 - e^{-2})}{1 - e^{-3}}$

e

$f_X = e^{-x}, \ x \geq 0, \quad f_Y = 3e^{-3y}, \ y \geq 0$

$f_{X,Y} = \begin{cases} e^{-x} \cdot 3e^{-3y}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$



$P(X > Y) = \int_0^\infty dx \int_0^x e^{-x} \cdot 3e^{-3y}\,dy =$

$= \int_0^\infty e^{-x}(-e^{-3y})\Big|_0^x\,dx = \int_0^\infty (-e^{-4x} + e^{-x})\,dx =$

$= \left(\frac{1}{4}e^{-4x} - e^{-x}\right)\Big|_0^\infty = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

$P(Y > X) = 1 - P(X > Y) = \frac{1}{4}$