אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

תאריך הבחינה: 27.03.2009
שם המורה:ל.ברזנסקי, י.לרמן, א.יוסף
מספר הקורס:201.1.131
שם הקורס:תורת ההסתברות 1
שנה: 2009; סמסטר:א; מועד:א
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: 3 דפ' נוסחאות מודפס נתון,
מחשב כיס עם מסך קטן.

<u>יש לענות על 4 שאלות מתוך 5</u>
הסבר ופרט את תשובותיך.
הקפד על כתב ברור ומסודר.
השאלות שוות בערכן.
התחל כל תשובה בעמוד חדש ומספר השאלה.

<u>שאלה 1.</u>

נתון $Y \sim U(1,2), X \sim \exp(\lambda = 1)$, מ"מ בלתי תלוים.

8 א) מצא פונקציה צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$.

7 ב) מצא $p(X > Y)$.

5 ג) מצא $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

5 ד) מצא $f_Z(z)$ כאשר $Z = Y - X$.

<u>שאלה 2.</u>

נתון: $X \sim U(-1,2)$, $Y = X^2$, $Z = X + Y$,

8 א)מצא פונקצית צפיפות $f_Y(y)$.

8 ב) מצא פונקצית צפיפות $f_Z(z)$

9 ג) מצא שונות משותפת $Cov(X,Y)$.

<u>שאלה 3.</u>

יש n ארגזים בכל אחד יש 3 כרטיסים המסומנים במספרים 0,1,2 . נבחרו באקראי מכל ארגז כרטיס אחד. נסמן X_k תוצאה של בחירה k.

נסמן $Y = X_1, \quad X = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

8 א) מצא פונקציה הסתברות של X, פונקציה הסתברות של Y .

10 ב) מצא פונקציה הסתברות משותפת של X ו-Y .

7 ג) מצא תוחלת $E(X|Y=0)$.

<u>שאלה 4.</u>
בשאלה אין קשר בין הסעיפים.

10 א) מספר אנשים המגעים לתחנת שירות מתפלג פואסוני עם ממוצע 10 אנשים בשעה. נסמן X מספר אנשים המגעים בין 9 ל 11, Y - מספר אנשים המגעים בין 10 ל 12. מצא מקדם מיתאם $\rho(X,Y)$.

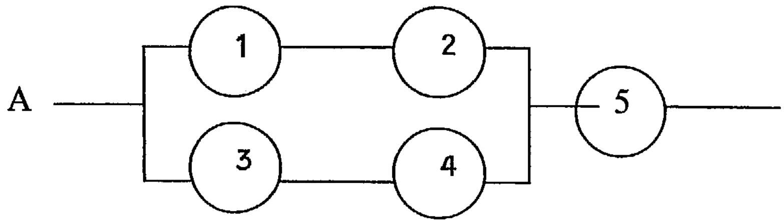
ב) נתון $Y = aX + b, X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

7 (1) הראה ש Y גם מתפלג נורמלי: $Y \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ומצא פרמטרים של Y.

8 (2) מצא $p(X > Y)$.

<u>שאלה 5.</u>

בשאלה אין קשר בין הסעיפים.
א) נתונה מערכת אלקטרונית לפי קונפיגורציה הבאה
10



זמן החיים של כל אחד מהאלמנטים 1-5 מתפלג מעריכית עם פרמטר λ.
כל האלמנטים בילתי-תלוים.
נסמן ב- X_{AB} זמן החיים של כל המערכת.
מצא $F_{X_{AB}}(t)$, EX_{AB}.

8 ב) במערכת חדשה יש רק אלמנט אחד, וזמן החיים שלו מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda = 1$. בתקלה מחליפים האלמנט מיד. מה מספר מינימלי של האלמנטים צריך להשאיר במלי כך שעם הסתברות לא קטנה מ 0.95 אפשר לספק עבודה רציפה של המערכת בתוך 100 שעות?

7 ג) יש שני אלמנטים. ידוע, שאלמנט הראשון הוא תקין והשני תקין עם הסתברות 0.5. אם אלמנט תקין אז זמן החיים שלו מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda = 1$. מצא $P(X_1 > X_2)$, כאשר X_i - זמן החיים של האלמנט i.

<u>בהצלחה!</u>

פתרון שאלה 1

(1) $X \sim exp(\lambda=1)$ $\quad X,Y$ ב"ת

$Y \sim U(1,2)$

(א) המ"מ X Y ב"ת עפ"י הנתון $\Rightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \Leftarrow X \sim exp(\lambda=1)$$

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-x} & 1 \leq y \leq 2, x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \Leftarrow$$

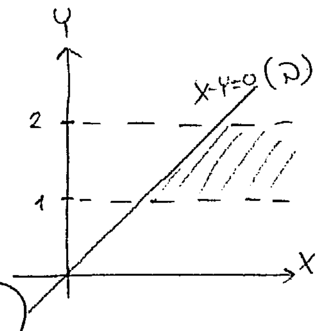
8/8

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \Leftarrow Y \sim U(1,2)$$

(ב)

$$P(X>Y) = P(X-Y>0) = \int_1^2 dy \int_y^\infty e^{-x}\,dx =$$

$$= \int_1^2 -e^{-x}\Big|_y^\infty dy = \int_1^2 e^{-y}\,dy = -e^{-y}\Big|_1^2 = e^{-1}-e^{-2}$$



$$P(X>Y) \approx 0.2325$$

7/7

(ג) $E\left(\frac{X}{Y}\right) = ?$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \iint_{\text{תחום הגדרתם של } x \text{ ו- } y} \frac{x}{y}\cdot e^{-x}\,dx\,dy = \int_1^2 dy \int_0^\infty \frac{x}{y} e^{-x}\,dx =$$

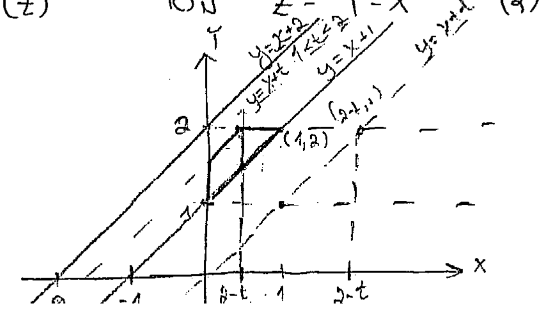
$$= \int_1^2 \frac{dy}{y} \cdot \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = \left(\ln y\Big|_1^2\right)\cdot\left(-xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= (\ln 2 - \ln 1)\cdot(0+1) = \ln 2.$$

$$E\left(\frac{X}{Y}\right) = \ln 2$$

5/5

(ד) $Z = Y - X$ מצא $f_Z(z)$ תחילה נמצא את $F_Z(t)$ ואז נגזור.



$F_Z(t) = P(Z \leq t)$:

$\underline{t \geq 2}$: $P(Z \leq t) = P(Y-X \leq t) = 1$

$\underline{1 \leq t < 2}$: $P(Z \leq t) = 1 - P(Z > t) =$

$$= 1 - \int_t^2 dy \int_0^{y-t} e^{-x} dx = 1 - \int_t^2 (1 - e^{-y+t}) dy =$$

$$= 1 - \left(2 - t + e^t \int_t^2 e^{-y} dy\right) = -1 + t + e^t (e^{-t} - e^{-2}) = t - e^{t-2}$$

$\underline{t < 1}$: $\quad P(z \le t) = P(y - x \le t) = \int_1^2 dy \int_{y-t}^{\infty} e^{-x} dx =$

$$= \int_1^2 -e^{-x} \Big|_{y-t}^{\infty} dy = \int_1^2 e^{-y+t} dy = e^t (e^{-1} - e^{-2}) = e^{t-1} - e^{t-2}$$

$$F_z(t) = \begin{cases} e^{t-1} - e^{t-2} & t \le 1 \\ t - e^{t-2} & 1 < t \le 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

$$f_z(z) = F_z'(t) = \begin{cases} e^{z-1} - e^{z-2} & z \le 1 \\ 1 - e^{z-2} & 1 < z \le 2 \\ 0 & z > 2 \end{cases}$$

5/5

2,5 ксе / кс

$y = x^2$

$$f_Y(y) = \sum f_X(h_i(y))\,|h_i'(y)|$$

1) $0 < y < 1$, $h_1(y) = -\sqrt{y}$, $h_2(y) = \sqrt{y}$

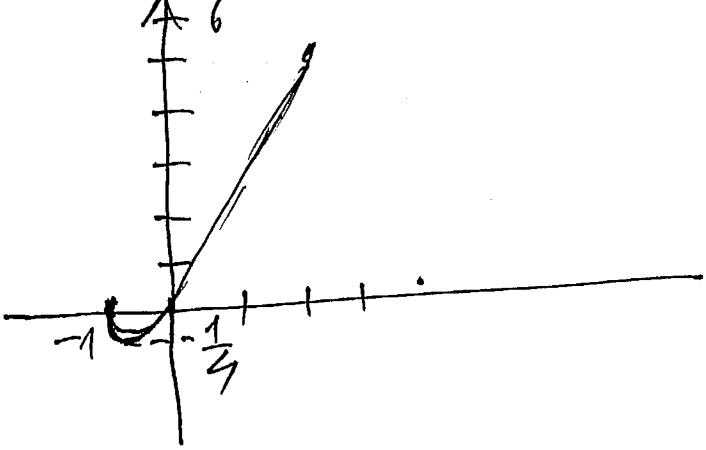
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & -1 \le x < 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{3\sqrt{y}}$$

2) $1 < y < 4$, $f_Y(y) = \dfrac{1}{6\sqrt{y}}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1 < y < 4 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$Z = X + X^2$ (а



$$f_{Z}(z) = \sum f_X(h_i(z)) \cdot |h_i'(z)|$$

$$x^2 + x - z = 0$$

1) $-1/4 < z < 0$

$$h_1(z) = \frac{-1-\sqrt{1+4z}}{2}, \quad h_2(z) = \frac{-1+\sqrt{1+4z}}{2}$$

$$|h_1'(z)| = |h_2'(z)| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+4z}} \cdot 4 = \frac{1}{\sqrt{1+4z}}$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4z}} = \frac{2}{3\sqrt{1+4z}}$$

2) $0 < z < 6$. $\quad f_Z(z) = \frac{1}{3\sqrt{1+4z}}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{3\sqrt{1+4z}}, & -1/4 < z < 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{1+4z}}, & 0 < z < 6 \end{cases}$$

(c

$$\mathrm{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - EX \cdot E(X^2)$$

$$EX = \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^{2} x^2 \cdot 1/3\, dx = \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{9}(8+1) = 1$$

$$E(X^3) = \int_{-1}^{2} x^3 \cdot 1/3\, dx = \frac{1}{3} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{12}(16-1) =$$

$$= \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

3 дбке

(c

X	0	1	2
$f_X(x)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Y	0	1	2
$f_Y(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(a

$X \backslash Y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	0	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$
1	$\frac{2^{n-1}-1}{3^n}$	$\frac{2^{n-1}}{3^n}$	0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$
2	$\frac{1}{3}-\frac{2^{n-1}}{3^n}$	$\frac{1}{3}-\frac{2^{n-1}}{3^n}$	$\frac{1}{3}$	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$
$f_Y(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\Sigma=1$

$$P(X=2, Y=0) = P(Y=0)\cdot P(X=2\mid Y=0) = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{3} - \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

(c

$X\mid Y=0$	0	1	2	
$f_{X\mid Y=0}(x)$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{2^{n-1}-1}{3^{n-1}}$	$1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\Sigma=1$

$$P(X=0\mid Y=0) = \frac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{(1/3)^n}{1/3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$P(X=1\mid Y=0) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{2^{n-1}-1}{3^n}\cdot 3 = \frac{2^{n-1}-1}{3^{n-1}}$$

$$P(X=2\mid Y=0) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$E(X\mid Y=0) = \frac{2^{n-1}-1}{3^{n-1}} + 2\left(1-\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right) = 2 - \frac{1+2^{n-1}}{3^{n-1}}$$

שאלה 4

א) יהי X_1 מספר אנשים בין 9 ל 10, X_2 - בין
10 ל 11, X_3 - בין 11 ל 12. אז

$X, Y \sim P(\lambda=20), \; X_i \in P(\lambda=10)$

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X_1+X_2, X_2+X_3)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} =$$

$$= \frac{\overset{=0}{cov(X_1, X_2)} + \overset{=0}{cov(X_1, X_3)} + cov(X_2, X_2) + \overset{=0}{cov(X_2, X_3)}}{(\sigma_X)^2} =$$

$$= \frac{Var(X_2)}{Var(X)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

1) ב)

$$F_Y(y) = P(aX+b < y) =$$

$$= P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y = f_X\Big(\underbrace{\frac{y-b}{a}}_{x}\Big) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\overset{x}{\frac{y-b}{a}} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} =$$

$$= \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

אז

$Y \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

[illegible]

$$\boxed{\mu_1 = b + a\mu,} \; \boxed{\sigma_1 = a\sigma}$$

ב)

$$P(X - Y > 0) =$$

$$X - Y \sim N(\mu_2 = \mu - \mu_1, \; \sigma_2^2 = \sigma^2 + \sigma_1^2) =$$

$$= N(\mu_2 = (1-a)\mu - b, \; \sigma_2^2 = \sigma^2(1+a^2))$$

$$P(X-Y)>0) = 1 - P(X-Y<0) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0-\mu_2}{\sigma_2}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(1-a)\mu - b}{\sigma^2(1+a^2)}\right)$$

5 פתרון

א) $X_{AB} = \min\left(\max\left(\min\left(X_1, X_2\right), \min\left(X_3, X_4\right)\right), X_5\right)$,

$$1 - F_{AB}(t) = P\left(X_{AB} > t\right) =$$
$$\left[P\left(X_1 > t\right)P\left(X_2 > t\right) + P\left(X_3 > t\right)P\left(X_4 > t\right) - P\left(X_1 > t\right)P\left(X_2 > t\right)P\left(X_3 > t\right)P\left(X_4 > t\right)\right]P\left(X_5 > t\right) =$$
$$\left[2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}\right]e^{-\lambda t} = 2e^{-3\lambda t} - e^{-5\lambda t};\ F_{AB}(t) = 1 - 2e^{-3\lambda t} + e^{-5\lambda t}.$$

$$EX_{AB} = \int_0^\infty \left(2e^{-3\lambda t} - e^{-5\lambda t}\right)dt = \frac{2}{3\lambda} - \frac{1}{5\lambda} = \frac{7}{15\lambda}.$$

ב) $X_1 \ldots X_n \sim \exp(1),\ \mu = EX_i = 1,\ \sigma^2 = VX_i = 1$

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \ge 100\right) \ge 0.95,\ P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \ge \frac{100 - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \ge 0.95,\ P\left(z \ge \frac{100-n}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95,$$
$$1 - \Phi\left(\frac{100-n}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95,\ \Phi\left(\frac{100-n}{\sqrt{n}}\right) \le 0.05,\ \frac{100-n}{\sqrt{n}} \le z_{0.05} = -1.65,\ n \ge 121.$$

ג) $P\left(X_1 > X_2\right) = \underbrace{P\left(X_2 up\right)}_{0.5}\underbrace{P\left(X_1 > X_2 \middle| X_2 up\right)}_{\text{0.5 by symmetry}} + \underbrace{P\left(X_2 = 0\right)}_{0.5}\underbrace{P\left(X_1 > 0\right)}_{1} = 3/4$