תאריך הבחינה: 01.05.09

שם המרצה: ל. ברזנסקי, י. לרנר., א. יוסף

שם הקורס: תורת ההסתברות 1

מס' הקורס: 201-1-131

מיועד לתלמידי: שנה '

שנה: 2009 סמסטר: א' מועד ב'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 3 דפי נוסחאות מודפס נתון, מחשב כיס עם מסך קטן

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' נבחן: ____________________

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

שאלה 1:

תהי $A=\{(x,y): x\ge 0,\ y+2\ge 0,\ y+x\le 2\}$ ונתונה פונקציה הצפיפות המשותפת:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} cx^2, & (x,y)\in A \\ 0, & else \end{cases}.$$

א. מצאו את c. 5

ב. מצאו את $f_X(x)$, $f_{Y|X}(y|x)$. 8

ג. מצאו $E[Y|X=2]$. 7

ד. מצאו $P[X<Y]$. 5

שאלה 2:

יהי משתנה מקרי $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. נגדיר $Y=\tan(X)$ ו- $Z=\begin{cases} |X^3|, & -1<X<1 \\ 0, & |X|\ge 1 \end{cases}$

א. מצאו את פונקצית הצפיפות $f_Y(y)$. 8

ב. מצאו את פונקצית התפלגות $F_Z(z)$ 10

ג. מצאו $E[Z]$ ו- $Cov(X,Z)$. 7

שאלה 3:

תהי סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ורציפים לחלוטין $X_k\sim U(0,n)$ לכל k טבעי, עבור n טבעי נתון כלשהו.

נגדיר משתנה מקרי $m_n=\min\{X_1,X_2,...,X_n\}$.

א. מצאו את פונקצית התפלגות המצטברת של m_n (זאת אומרת, מצא את $F_{m_n}(t)$). 7

ב. מצאו את משתנה מקרי Y בעל ההתפלגות $\lim_{n\to\infty}F_{m_n}(t)$. 5

ג. מצאו $E[e^{-Y}]$. 6

~~ד. מצאו $p(m_2>X_3)$~~ 7

שאלה 4:

לבנק יש שתי כניסות. לכניסה הקדמית מגיעים בדקה אנשים לפי התפלגות פואסונית $X \sim P(\lambda)$ ולכניסה האחורית מגיעים בדקה אנשים לפי התפלגות $Y \sim P(\mu)$. הנח ששני תהליכים בלתי תלויים.

8 א. מצאו את ההתפלגות של סך האנשים המגיעים בדקה בשתי הכניסות.

8 ב. בהנחה שסך האנשים שהגיעו לבנק בדקה האחרונה הוא n, הוכח שההתפלגות של מספר האנשים שהגיעו לכניסה הקדמית של הבנק היא התפלגות בינומית ומצא פרמטרים של התפלגות הזאת.

9 ג. מצא מקדם מיתאם $\rho(X+2Y, X-Y)$.

שאלה 5:

לדייר הבית מסוים יש 20 מנורות "מיוחדות" התאימות אך ורק לנברשת מסויימת בעל נורה "מיוחדת" אחד באותו הבית (זאת אומרת, כל פעם יש שימוש בנורה "מיוחדת" אחד עד שהיא נשרפת ואז מחליפים אותה בנורה "מיוחדת" אחרת וכך הלאה). ידוע שזמן חיים של כל נורה "מיוחדת" מתפלג מעריכית: $X_i \sim Exp(2)$ בשנים עבור $1 \le i \le 20$ טבעי.

10 א. מה ההסתברות לכך שדייר הבית יצטרך לקנות נורות חדשות (כל ה-20 הנורות נשרפו) לכל הפחות לאחר 10.5 שנים ?

7 ב. אילו היו לדייר הבית 20 נברשות בעל נורה "מיוחדת" אחד. מה ההסתברות לכך שדייר הבית יצטרך לקנות נורות חדשות (אחד מה- 20 הנורות נשרפה) לכל היותר לאחר שנתיים?

8 ג. מצאו את $E[\max\{X_1 + X_2, X_3\}]$.

בהצלחה.

בס"ד

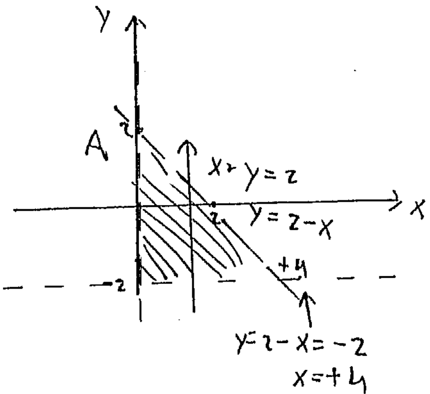
מבחן בהסתברות:

שאלה 1:

((אומר שעבדתי 4 הנושאים ולכן לא בחרתי שאלות. תודה).

א. נמצא את c:

$A=\{(x,y): x\geq 0, y+2\geq 0, y+x\leq 2\}$



$$f_{x,y}(x,y)=\begin{cases} cx^2 & (x,y)\in A \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$\iint_A f_{x,y}(x,y)dxdy=1$$

$$c\iint_A x^2 dxdy = c\int_0^4 x^2dx\int_{-2}^{2-x}dy =$$

$$= c\int_0^4 x^2\cdot y\Big|_{-2}^{2-x}\cdot dx = c\int_0^4 x^2[2-x-(-2)]dx = c\int_0^4 x^2(4-x)dx =$$

$$= c\int_0^4 4x^2-x^3dx = c\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^4 = c\left(\frac{64\cdot 4}{3}-\frac{64\cdot 3}{3}\right)=c\cdot 64\cdot\frac{1}{3}=1$$

$$\boxed{c=\frac{3}{64}} \qquad f_{x,y}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{64}x^2 & (x,y)\in A\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ב.

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{x,y}(x,y)dy=\frac{3}{64}\int_{-2}^{2-x}x^2dy = \begin{cases}\frac{3}{64}\cdot(4x^2-x^3) & 0<x<2-y\\ 0 & \text{else}\end{cases} \quad ; \quad -2<y<2$$

(חשבנו לעיל)

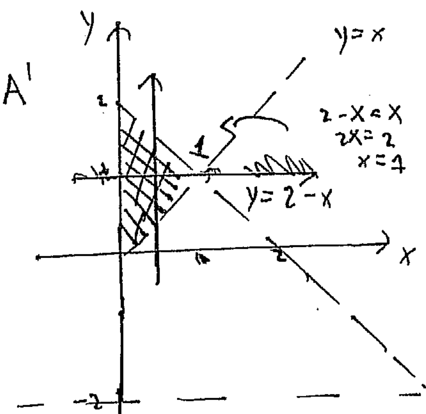
$$f_{y|x}(y|x)=\frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}=\frac{\frac{3}{64}x^2}{\frac{3}{64}x^2(4-x)}=\begin{cases}\frac{1}{4-x} & -2<y<2-x\\ 0 & \text{else}\end{cases} \quad ; \quad 0<x<4$$

ג.

לפי התחום

$$E(y|x=2)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_{y|x}(y|2)dy=\int_{-2}^{0}y\cdot\frac{1}{4-2}dy=\frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^{0}=\frac{1}{2}\cdot(0-2)=\underline{-1}$$

ד.



$$P(x<y)=\iint_{A'}f_{x,y}(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{3}{64}\int_0^1 x^2\int_x^{2-x}dy = \frac{3}{64}\int_0^1 x^2(2-2x)dx =$$

$$= \frac{3}{32}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{3}{32}\int_0^1(x^2-x^3)dx =$$

$$= \frac{3}{32}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 =$$

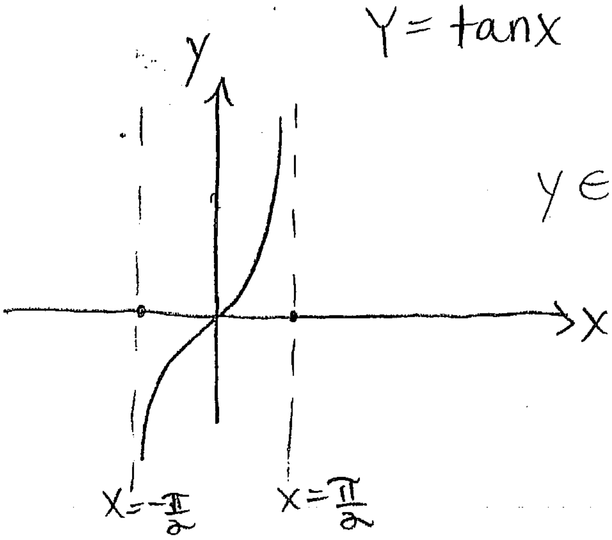
$$= \frac{3}{32}\cdot\frac{1}{12}=\boxed{\frac{1}{128}}$$

$$X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad ②$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \le -\frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} & , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & , x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$Y = \tan x$$



א.

$$y \in (-\infty, \infty)$$

לפי משפט הצפיפות עבור טרנספורמציה:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|$$

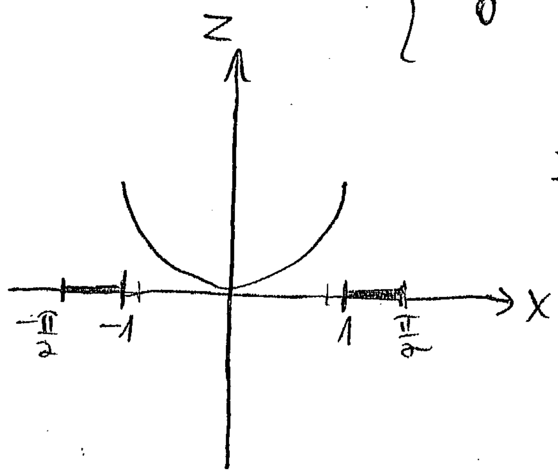
עבור $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Leftarrow h(y) = \arctan y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$|h'(y)| = \frac{1}{1+y^2}$$

$$f_Y(y) = f_X(\arctan y) \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{\pi + \pi y^2}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\pi + \pi y^2}} \quad (\forall y)$$

ג. $$Z=\begin{cases}|X^3| & , -1<X<1 \\ 0 & , |X|\geq 1\end{cases}$$



$Z\in[0,1]$

$F_Z(z)=?$

$z<0 \Rightarrow F_Z(z)=0$

$z=0 \Rightarrow F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(Z\leq 0)=P(Z=0)=$

$=P\left(-\frac{\pi}{2}<X\leq -1\right)+P\left(1\leq X<\frac{\pi}{2}\right)=F_X(-1)-\underbrace{F_X\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0}+\underbrace{F_X\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}-F_X(1)=$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}=1-\frac{2}{\pi}$

$0<z\leq 1 \Rightarrow F_Z(z)=P(Z\leq z)=F_Z(0)+P\left(\sqrt[3]{-z}\leq X\leq\sqrt[3]{z}\right)$

$=1-\frac{2}{\pi}+F_X(\sqrt[3]{z})-F_X(\sqrt[3]{-z})=1-\frac{2}{\pi}+\frac{\sqrt[3]{z}}{\pi}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt[3]{-z}}{\pi}-\cancel{\frac{1}{2}}=$

$=1-\frac{2}{\pi}+\frac{2\sqrt[3]{z}}{\pi}=1+\frac{2\sqrt[3]{z}-2}{\pi}$

$z>1 \Rightarrow F_Z(z)=P(Z\leq z)=1$

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & , z<0 \\ 1+\frac{2\cdot\sqrt[3]{z}-2}{\pi} & , 0\leq z\leq 1 \\ 1 & , z>1\end{cases}$$

ג.

$$EZ = -\underbrace{\int_{-\infty}^{0} F_Z(z)\,dz}_{0} + \int_{0}^{\infty} (1-F_Z(z))\,dz$$

$$EZ = \int_0^1 \frac{2-2\sqrt[3]{z}}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-z^{\frac{1}{3}})\,dz =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[z - \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_0^1\right] = \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{3}{4}\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\boxed{EZ = \frac{1}{2\pi}}$$

$$Cov(X,Z) = E(X\cdot Z) - EX\cdot EZ$$

$$-1<X<1 \Rightarrow Cov(X,Z) = Cov(X,|X^3|) = E(X\cdot|X^3|) - EX\cdot EZ =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\cdot|x^3|\cdot\frac{1}{\pi} - \underbrace{EX}_{0}\cdot\underbrace{EZ}_{\frac{1}{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{0}(-x^4)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right] = 0$$

$$\boxed{Cov(X,Z)=0}$$

(מרווחים $1<x<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<x<-1$ $Z=0$ ולכן $Cov=0$,

ב $X\notin[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ X לא מקבל ערכים).

3 18 KC

$$F_{m_n}(t) = 1-(1-F_{X_1}(t))\cdots(1-F_{X_n}(t)) =$$ (K

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n, & 0 \leq t \leq n \\ 1, & t \geq n \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] =$$ (2

$$= 1-e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad Y \sim \exp(\lambda=1)$$

$$E(e^{-Y}) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-t}\,dt =$$ (2

$$= -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

4,15ke

$X+Y \sim P(\mu_1 = \mu+\lambda)$ (к 8

$U \in B\left(n,\ p = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)$ (λ 8

$V \in B\left(n,\ p = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$

≥ 9

$\text{cov}(X+2Y, X-Y) =$

$= \text{cov}(X,X) + \underbrace{\text{cov}(X,Y)}_{=0} - 2\text{cov}(Y,Y)$

$= \text{Var}(X) - 2\text{Var}(Y)$

$\rho(X+2Y, Y-X) = \dfrac{\text{Var}(X) - 2\text{Var}\,Y}{\sqrt{\text{Var}(X)+4\text{Var}(Y)}\,\sqrt{\text{Var}(X)+\text{Var}(Y)}} =$

$= \dfrac{\lambda - 2\mu}{\sqrt{\lambda+4\mu}\,\sqrt{\lambda+\mu}}$

$X_i \sim exp(2)$, $1 \le i \le 20$ ב"ת

5

א. $P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \ge 10.5\right) = ?$

$$P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \ge 10.5\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{20} X_i \le 10.5\right) =$$

לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\mu = EX_i = \frac{1}{2} \quad , \sigma = \sigma(X_i) = \frac{1}{2}$$

$$= 1 - P\Bigg(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{20} X_i - 20\mu}{\sqrt{20}\,\sigma}}_{Z} \le \frac{10.5 - 20\mu}{\sqrt{20}\,\sigma}\Bigg) = 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$\approx 1 - \Phi(0.22) = 1 - 0.5871 = 0.4129$$

ב. נסמן: $Y = \min\{X_1, \dots, X_{20}\}$

נרצה לחשב: $P(Y \le 2)$

$$F_Y(t) = F_{\min\{X_1, \dots, X_{20}\}}(t) = 1 - (1 - F_{X_i}(t))^{20} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 - e^{-40t} & , t \ge 0 \end{cases}$$

$$P(Y \le 2) = F_Y(2) = 1 - e^{-80} = 1 - \frac{1}{e^{80}}$$ לכן

ג. $\cancel{E[\max\{X_1 + X_2, X_3\}]}$

$\cancel{Z = \max\{X_1 + X_2, X_3\}}$ ~~נסמן~~

$$\cancel{F_Z(t) = F_{\max}(t) = P(\max\{X_1 + X_2, X_3\} \le t) = \{\text{ב"ת}\}}$$

$$\cancel{= F_{X_1 + X_2}(t) \cdot F_{X_3}(t) = P(X_1 + X_2 \le t) \cdot P(X_3 \le t)}$$

$Y = X_3$ $\quad , X = X_1 + X_2$ $\quad$ /10/ (2

$X \sim Gamma(\lambda = 2,\ m = 2)$, $\quad Y \sim exp(\overset{5K}{\lambda} = 2)$,

$f_X(t) = 4t\,e^{-2t}$, $\quad f_Y(t) = 2e^{-2t}$

$F_X(t) = \int_0^t 4x\,e^{-2x}\,dx = 1 - e^{-2t}(1+2t)$

$F_Y(t) = 1 - e^{-t}$

$Z = \max\{X, Y\}$, $\quad F_Z(t) = F_X(t) \cdot F_Y(t) =$

$= \left(1 - e^{-2t}(1+2t)\right)(1 - e^{-t}) =$

$= 1 - e^{-2t}(2+2t) + e^{-4t}(1+2t)$

$E\,Z = \int_0^\infty [1 - F_Z(t)]\,dt =$

$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}(3+2t) + \frac{1}{8}e^{-4t}(1+2t)\right]\Big/_0^\infty =$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$