אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 03.07.11
שם המורה: ברזנסקי
מבחן ב: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה
מספר הקורס: 201.1.9571
שנה: 2011. סמ:ב'. מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר:2 דפי נוסחאות בכתב יד, מחשב כיס קטן.

ענה על 5 שאלות מתוך 6
יש לסמן השאלות האלה
משקל כל שאלה 20 נקודות
כל תשובות תהיינה מלאות
נא לכתוב באופן מסודר

שאלה 1.

מצא מירחק בין הישרים:

$$L_1: \begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}, \quad L_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

שאלה 2.

א) מצא בקירוב $\sqrt{5e^{0.02}+2.03^2}$ ע"י דפרנציאל שלם. 6 נ'

ב) חשב נגזרת מכוונת של פונקציה $u=xy^2z^3$ בכיוון $\vec{a}=\{2,2,1\}$ בנקודה $M(1,-1,1)$. 6 נ'

ג) משואה $f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ מגדירה פונקציה סתומה $z=g(x,y)$ כאשר $f(u,v)$ פונקציה גזירה.
הראה, ש $xz_x'+yz_y'=z$. 8 נ'

שאלה 3

א) האם טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$. מתכנס? אם כן איך הוא מתכנס? 8 נ'

ב) האם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ מתכנס? 6 נ'

ג) פתח פונקציה $y=\frac{x}{x^2+1}$ לטור חזקות. מצא תחום התכנסות של הטור. 6 נ'

שאלה 4.

א) מצא נקודות אקסטרמום מקומי של הפונקציה $u=x^2+y^2+z^2$ תחת האילוף $x+2y+3z=7$.
12 נ'

ב) מצא מישור משיק לפרבולויד $z=x^2+y^2$ המקביל למישור $x+y+z=1$. 8 נ'

שאלה 5.

א) נתון שדה וקטורי $\vec{F}=\{yz,xz,xy\}$.

(1) בדוק שזה שדה משמר. 5 נ'

(2) מצא פוטנציאל של השדה. 5 נ'

(3)מצא עבודה $\int_A^B \vec{F}d\vec{r}$ כאשר $A(1,-1,1)$, $B(2,1,3)$. 4 נ'

ב) החליף סדר הינטגרציה

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x}}^{1-x^2} f(x,y)dy$$. 6 נ'

שאלה 6

חשב $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}^0 dS$ כאשר $\vec{F}=\{x,0,z\}$, S חלק של חרוט $x^2+z^2=y^2$ החסום ע"י מישורים $y=1, y=0$

א) באופן ישיר. 12 נ'

ב) ע"' משפט גאוס. 8 נ'

בהצלחה!

1.1 Бкс

$$L_1: \begin{cases} x-y+z+=3 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}$$

$x=0,\ z=1,\ y=-2 \Rightarrow \quad A(0,-2,1)$

$z=0,\ x=1,\ y=-2 \Rightarrow \quad B(1,-2,0)$

$\overrightarrow{AB}=\langle 1,\ 0,\ -1\rangle$

$L_1: \frac{x-0}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}=t; \quad \begin{cases} x=t \\ y=-2 \\ z=-t+1 \end{cases}$

$M_1(t,-2,-t+1)\in L_1$

$L_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}=s, \quad \begin{cases} x=s+1 \\ y=s-1 \\ z=s+1 \end{cases}$

$M_2(s+1,\ s-1,\ s+1)\in L_2$

$d=|\overrightarrow{M_2M_1}|=\sqrt{(s+1-t)^2+(s+1)^2+(t+s)^2}$

$$\begin{cases} d'_s=\cancel{2}(s+1-t)+\cancel{2}(s+1)+\cancel{2}(t+s)=0 \\ d'_t=-\cancel{2}(s+1-t)+\cancel{2}(t+s)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3s+2=0 \\ 2t-1=0 \end{cases}$$

$s=-\frac{2}{3},\quad t=\frac{1}{2},\quad M_1\left(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right),\ M_2\left(\frac{1}{2},-2,\frac{1}{2}\right)$

$d=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2}=$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}$

$$1.\ \sqrt{5e^{0.02}+(2.03)^2}$$ Длоке (к

$z=\sqrt{5e^x+y^2}$, $M(0.02,\ 2.03)$

$M_0(0,\ 2)$, $z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{5e^x+y^2}}\cdot 5e^x\Big|_{M_0} =$

$= \dfrac{5}{6}$, $z'_y = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{5e^x+y^2}}\,\cancel{2}y\Big|_{M_0} = \dfrac{2}{3}$

$z\big|_{M_0} = 3$, $z(M) = z(M_0) + z'_x\big|_{M_0}\Delta x + z'_y\big|_{M_0}\Delta y =$

$= 3 + \dfrac{5}{6}\cdot 0.02 + \dfrac{2}{3}\cdot 0.03 = 3.037$

(б

$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}} = u'_x\big|_M a_x^0 + u'_y\big|_M a_y^0 + u'_z\big|_M a_z^0$

$\vec{a}^0 = \left\langle \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3} \right\rangle$,

$u'_x = y^2z^3\big|_M = 1$, $u'_y = 2xyz^3\big|_M = -2$, $u'_z\big|_M = 3xy^2z^2\big|_M = 3$

$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{a}} = 1\cdot\dfrac{2}{3} - 2\cdot\dfrac{2}{3} + 3\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$

(в

$F(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{z},\ \dfrac{y}{z}\right) = 0$

$z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{f'_u\left(\frac{1}{z}\right)}{f'_u\left(-\frac{x}{z^2}\right) + f'_v\left(-\frac{y}{z^2}\right)} = +\dfrac{z f'_u}{x f'_u + y f'_v}$

$z'_y = +\dfrac{z f'_v}{x f'_u + y f'_v}$

$x z'_x + y z'_y = \dfrac{xz f'_u + yz f'_v}{x f'_u + y f'_v} = z$

שאלה 3

א) טור עם ערכים חיוביים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^4+n}}}_{a_n}$$

טור זה הרמוני, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

מתבדר

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \cdot \frac{\sqrt{n^4}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^4}{n^4+n}} = 1$$

אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$ - מתבדר

אבל הטור מתכנס ע"פ מבחן לייבניץ

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \to 0, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+x}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^4+x}}\right)' = \frac{\sqrt{x^4+x} - \frac{x}{2\sqrt{x^4+x}}(4x^3+1)}{x^4+x} =$$

$$= \frac{2(x^4+x) - x(4x^3+1)}{x^4+x} = \frac{-3x^3+\cancel{x}}{x^4+x} < 0$$

(ל-$x \geq 2$.)

אז a_n יורדת החל מ $\underline{n \geq 2}$

לכן טור מתכנס בתנאי

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{מתכנס}$$

(2

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n+1} t^n + \dots$$

$$|t| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n+1} x^{2n} + \dots$$

$$|x| < 1$$

$$\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots + (-1)^{n+1} x^{2n+1} + \dots$$

$$|x| < 1$$

4 лбке

$$F = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y+3z-7)$$

$$F'_x = 2x+\lambda=0,\quad F'_y = 2y+2\lambda=0,\quad F'_z = 2z+3\lambda=0$$

$$x=-\frac{\lambda}{2},\quad y=-\lambda,\quad z=-\frac{3\lambda}{2},$$

$$-\frac{\lambda}{2}-2\lambda-\frac{9\lambda}{2}=7,\quad -14\lambda=14,\quad \lambda=-1$$

$$x=\frac{1}{2},\quad y=1,\quad z=\frac{3}{2}$$

$$F''_{xx}=F''_{yy}=F''_{zz}=2,\quad F''_{xy}=F''_{xz}=F''_{yz}=0$$

$$d^2F = 2(dx)^2+2(dy)^2+2(dz)^2>0$$

[illegible] $M_0\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ [illegible]

[illegible]

$$\vec{n}=\mathrm{grad}\, g=(2x, 2y, -1),\quad g(x,y,z)=x^2+y^2-z=0 \ (2$$

$$\frac{2x}{1}=\frac{2y}{1}=\frac{-1}{-1}\qquad x=y=\frac{1}{2}$$

$$z=x^2+y^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\quad M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+}\qquad x-\frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$x+y+z=\frac{3}{2}$$

5) δ Ke

(1) (K

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} =$$

$$= i(x-x) - j(y-y) + k(z-z) = 0$$

(2)

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz$$

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$u = \int_0^x yz\,dx = xyz + C$$

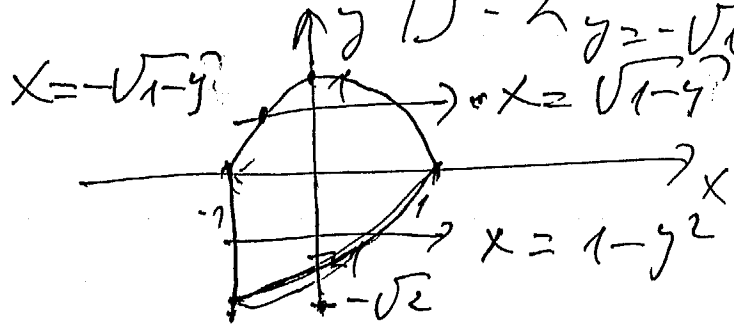
(2)

$$\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = u(B) - u(A) =$$

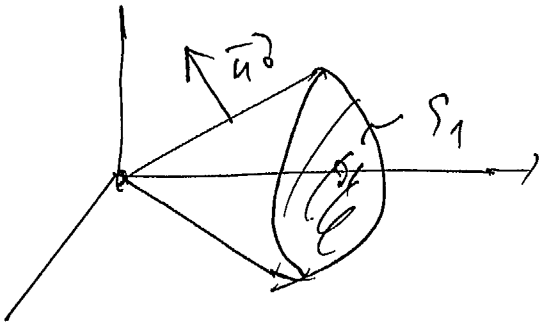
$$= 6 + 1 = 7$$

$D = \{\, x=-1,\ x=1,\ y=-\sqrt{1-x},\ y=1-x^2$

(2)



$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{1-x^2} f\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-1}^{1-y^2} f\,dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f\,dx$$



6 лбке
лс

$g = x^2 + z^2 - y^2$

$$\vec{n}^0 = \pm \frac{\operatorname{grad} g}{|\operatorname{grad} g|} = \oplus \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-y}{\sqrt{\ }}, \frac{z}{\sqrt{\ }} \right\}$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + z^2) \cdot \left(+\frac{1}{y}\right) dx\,dz =$$

$$= + \iint_{D_{xz}} \sqrt{x^2+z^2} \, dx\,dz = + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \cdot r \, dr =$$

$$= + 2\pi \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = + \frac{2}{3}\pi$$

$S \cup S_1 \to$ ~~Т~~ гаусс остр (2

$$\iint_S F \cdot n^0 \, dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 2, \quad \iiint_T 2\,dx\,dy\,dz = 2|T| =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = \frac{2}{3}\pi, \quad ? \iint_{S_1} F \cdot n^0 \, dS$$

$$\vec{n}^0 = \vec{j} \cdot \quad \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iint_{D_{xz}} F \cdot \vec{n}^0 \cdot \frac{1}{|\cos\beta|} \, dx\,dz =$$

$$= \iint_{D_{xz}} 0 \, dx\,dz = 0 \; !!$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \frac{2}{3}\pi$$