תאריך הבחינה: 07.07.13

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

שם המורה: ברזנסקי

מבחן ב: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה

מספר הקורס: 201.1.9571

שנה: 2013. סמ:ב'. מועד: א'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 2 דפי נוסחאות דו צדדי, מחשב כיס קטן.

ענה על 5 שאלות מתוך 6

יש לסמן השאלות האלה

משקל כל שאלה 20 נקודות

כל תשובות תהיינה מלאות

נא לכתוב באופן מסודר

שאלה 1.

נתון: ישר $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$ ומישור $P: 2x+y+z=0$.

א) הראה ש $L \| P$. 5 נ'

ב) מצא מרחק מ- L עד P. 5 נ'

ג) מצא משואה של ישר $L_1 \subset P$ כך ש $L \| L_1$. 10 נ'

שאלה 2.

נתונה פונקציה
$$z = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+4y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

א) האם z רציפה בנקודה $(0,0)$? 8 נ'

ב) האם z דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$? 12 נ'

שאלה 3

מצא נקודות אקסטרמום מקומי של פונקציה
$$u = z\ln z - z - z\ln(xy) + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y$$

שאלה 4.

א) מצא נפח של הגוף הנימצא בין מישטחים $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ ו $z = 3 - x^2 - y^2$. 10 נ'

ב) החליף סדר אינטגרציה $\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} z\,dy$ 10 נ'

שאלה 5.

א) מצא עבודה של שדה $\vec{F} = \{x, -y, xz\}$ לאורך וקטור $\vec{AB}$ כאשר $A(1,-1,1), B(-2,0,2)$ 8 נ'

ב) הים טורים הבאים מתכנסים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^n(2n+1)!}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 12 נ'

<u>שאלה 6</u>

א) מצא שטף של שדה $\vec{F}=\{y-z,z-x,y-x-1\}$
דרך משטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מ $z=1$ עד $z=2$ 10 נ'

ב) מצא תחום התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}x^n$ 10 נ'

בהצלחה!

07.07.13

$\vec{v} = \{1, -1, -1\}$, $\vec{n} = \langle 2, 1, 1 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow L \parallel P$

$$d = \frac{|2 - 1 + 0|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftarrow M_0(1, -1, 0) \in L$$

$L_2 \perp P$, $M_0 \in L_2$

$\vec{n}_2 = \langle 2, 1, 1 \rangle \Rightarrow L_2 : \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{1} \right.$

$$L_2 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$\Leftarrow M_1 = L_2 \cap P$

$2(2t+1) + (t-1) + t = 0$, $6t + 1 = 0$,

$t = -\frac{1}{6}$, $M_1\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \in L_1$

$\vec{v} = \langle 1, -1, -1 \rangle \parallel L_1 \Rightarrow$

$$L_1 : \frac{x - \frac{2}{3}}{1} = \frac{y + \frac{7}{6}}{-1} = \frac{z + \frac{1}{6}}{-1}$$

פתרון

א)

$$0 \le \frac{x^4+y^4}{x^2+4y^2} \le \frac{x^4}{x^2}+\frac{y^4}{4y^2} \to 0$$

לכן הפונקציה רציפה

ב)

$$z'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^2\cdot\Delta x}=0$$

$z'_y(0,0)=0$ ובאופן דומה ~~[illegible]~~

לכן

$$\Delta z = \cancel{z(0,0)} + \varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ \cancel{=\varepsilon\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta z}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}{[(\Delta x)^2+4(\Delta y)^2]\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$0\le\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^4+(\Delta y)^4}{[(\Delta x)^2+4(\Delta y)^2]\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\le\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^2\cdot\Delta x}+\frac{(\Delta y)^4}{4(\Delta y)^2\cdot\Delta y}\right]=0$$

לכן z דיפרנציאבילית

סעיף ו 3

$u'_x = -\frac{z}{xy}\cdot y + y + 2x - 4$

$u'_y = -\frac{z}{\cancel{x}y}\cdot\cancel{x} + x + 4y - 2$

$u'_z = \ln z + \cancel{1 - 1} - \ln(xy)$

$$\begin{cases} -\frac{z}{x} + y + 2x - 4 = 0 \\ -\frac{z}{y} + x + 4y - 2 = 0 \\ \ln z = \ln xy \end{cases} \qquad \underline{z = xy} \quad \begin{cases} \cancel{-y+y} + 2x - 4 = 0 \\ \cancel{-x+x} + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

$x = 2, \; y = \frac{1}{2}, \; z = 1 \Rightarrow \underline{M_0(2, \frac{1}{2}, 1)}$

$u''_{xx} = \frac{z}{x^2} + 2, \quad u''_{xy} = 1, \quad u''_{xz} = -\frac{1}{x}$

$u''_{yx} = 1 \qquad u''_{yy} = \frac{z}{y^2} + 4, \quad u''_{yz} = -\frac{1}{y}$

$u''_{zx} = -\frac{1}{x} \qquad u''_{zy} = -\frac{1}{y} \qquad u''_{zz} = \frac{1}{z}$

$\in M_0(2, \frac{1}{2}, 1)$ נקודת [illegible]

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

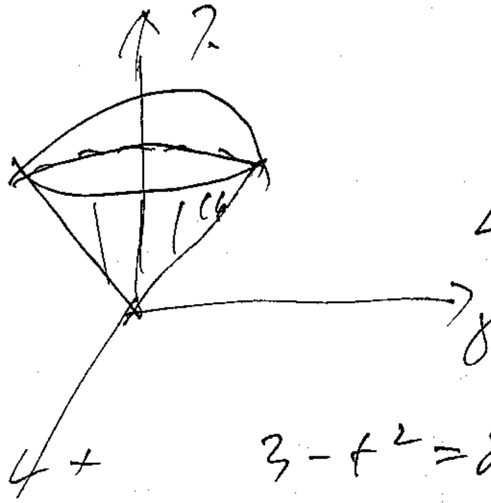
$\boxed{\text{לכן } M_0(2,\frac{1}{2},1) \text{ נקודת מינימום מקומית}}$

$\frac{9}{4} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{9}{4} & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 18 - 1 > 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{9}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{4}\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{9}{4}(8-4) - (1-1) - \frac{1}{2}(-2+4) = 9 - 1 > 0$$

4 16ke

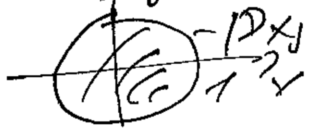


$$\begin{cases} z = 3 - x^2 - y^2 \\ z = 2\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$\sqrt{x^2+y^2} = t$

$3 - t^2 = 2t \qquad t^2 + 2t - 3 = 0$

$t_1 = 3, \quad \underline{t_2 = +1} \qquad \underline{t = -3}$



$\underline{x^2 + y^2 = 1}$

$$V = \iint_{D_{xy}} \left[3 - x^2 - y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right] dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 - r^2 - 2r)\, r\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(3\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3}{3}\right)\Big|_0^1 =$$

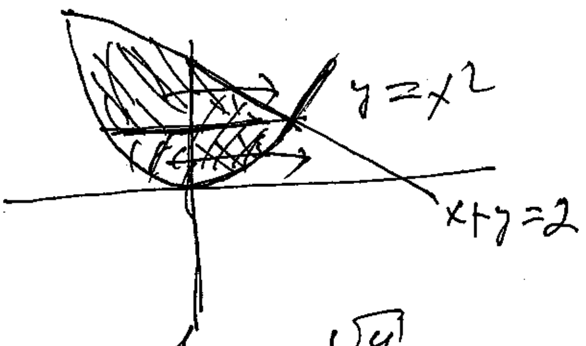
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) d\varphi = \frac{7}{12} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x} f\, dy =$$

$x^2 = 2 - x \qquad x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = -2, \quad x_1 = 1$

$y_1 = 4, \quad y_2 = 1$



$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f\, dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f\, dx$$

שאלה 5

$$L: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} = t$$

$$\begin{cases} x = -3t+1 \\ y = t-1 \\ z = t+1 \end{cases} \qquad t_1 = 0, \quad t_2 = 1$$

$$\int_L (x\,dx - y\,dy + xz\,dz) =$$

$$= \int_0^1 (xx' - yy' + xzz')\,dt = \int_0^1 [(-3t+1)(-3) - (t-1) + (-3t+1)(t+1)]\,dt =$$

$$= \int_0^1 (\underline{9t} - 3 - \underline{t} + 1 - 3t^2 - \underline{2t} + 1)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (-3t^2 + 6t - 1)\,dt = \left(-\frac{3t^3}{\cancel{3}} + \frac{6t^2}{2} - t\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -1 + 3 - 1 = 1$$

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(2n+1)!}, \quad a_n = \frac{n!}{2^n(2n+1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}(2n+3)!} = \frac{n!\,(n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot (2n+1)!\,(2n+2)(2n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)} = 0 < 1$$

ט"ר מתכנס

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$a_n = \frac{1}{n \ln n}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad L(a_n) \to$$ מונוטונית יורדת

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{1}{x \ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \ln|\ln x|\Big|_2^A = \lim_{A\to\infty} \ln|\ln A| - \ln \ln 2 =$$

$$= \infty \Rightarrow$$ ט"ר מתבדר

$z^2 = x^2 + y^2$

$G = x^2 + y^2 - z^2$

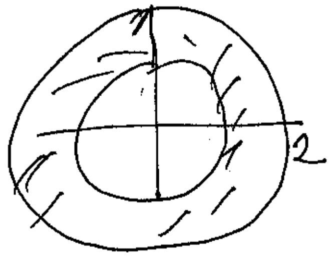
$\vec{n}^0 = \pm \dfrac{\text{grad } G}{|\text{grad } G|} = \pm \left\{ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{\ }}, -\dfrac{z}{\sqrt{\ }} \right\}$

$\vec{F} \cdot \vec{n}^0 = \dfrac{(y-z)x + (z-x)y - z(\cancel{y}-\cancel{x}-1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$

$= \dfrac{\cancel{yx} - \cancel{zx} + \cancel{zy} - \cancel{xy} + \cancel{zx} - \cancel{zy} + z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \ |\cos\gamma| = \dfrac{z}{\sqrt{\ }}$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^0 \, dS = \iint_{D_{xy}} \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} \, dx\,dy = \iint_{D_{xy}} dx\,dy =$

$= |D_{xy}| = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$



D_{xy}

(2)

$R = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)((n+1)^2+1)}{(n^2+1)(n+2)} =$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} \cdot \dfrac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1 \Rightarrow \quad |x| < 1$

$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1}, \quad a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}, \quad b_n = \dfrac{1}{n}$ — מתבדר

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot n}{n^2+1} = 1 \Rightarrow$ מתבדר ע"פ ~~[illegible]~~

$\underline{x = -1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2+1}$

מתכנס ע"פ
לייבניץ

ע"פ משפט לייבניץ

$a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{x^2+1 - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ עבור $x > 1$ ...

מתכנס ע"פ ... לייבניץ ...