תאריך הבחינה: 28.07.13
שם המרצה: פרופ' ל. ברזנסקי
שם הקורס: חדו"א 2 לביוטכנולוגיה
מס' הקורס: 0201.1.9571
מיועד לתלמידי:
שנה: 2013 סמסטר: ב מועד ב
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: שני דפי נוסחאות (דו-צדדיים), מחשבון

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' נבחן: ______________

יש להשיב על 5 בדיוק מתוך 6 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (20 נקודות).
נמקו את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדויק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

בהצלחה !!

1. א) (10 נק') מצא את תחום התכנסות של הטור: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\cdot x^n$

ב) (10 נק') מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של פונקציה: $z=x\cdot y$ בתחום $D=\{y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\}$.

2. א) (10 נק') מצה משוואת המישור העובר דרך הישר $l:\begin{cases}3x-2y+z-3=0\\ x-2z=0\end{cases}$.
(הישר כולו מונח במישור המבוקש) במאונך למישור $x-2y+z+5=0$.

ב) (10 נק') האם המשוואה $e^{xy^2z^3}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ מגדירה פונקציה סתומה $z=f(x,y)$ בסביבה של הנקודה $M(0,0,1)$? נמק. חשב $z'_x|_M$.

3. א) (10 נק') חשב את האינטגרל הכפול $\iint\limits_D ydxdy$ לפי תחום הבא: $D\{\ y\ge 0, x^2+y^2\le 4x\}$.

ב) (10 נק')) נתונה פונקציה: $u=x^2+\sin y-xz$. מצא את הנגזרת הכיוונית (המכוונת) $\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}$ בנקודה $M(1,\frac{\pi}{2},-3)$ בכיוון : $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$. מצא $|\max\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}|$ בכל כיוונים .

4. חשב את שטף של השדה הוקטורי $\vec{F}=\frac{1}{3}\left(x^3-2y^2\right)\cdot\vec{i}+\frac{1}{3}\left(e^{2z}+y^3\right)\cdot\vec{j}-z\left(x^2+y^2+1\right)\cdot\vec{k}$
דרך חלק המשטח $z=-\left(x^2+y^2\right)$ הנמצא מעל המישור $z=-4$ (לא כולל מישור עצמו).

5. א) (12 נק') האם $\vec{F}=\{e^x\sin y-x^2, e^x\cos y-1\}$ שדה משמר? מצא עבודה של $\vec{F}$ דרך חצי מעגל העליון $x^2+y^2=2x$ בכיוון נגד שעון.

בכיוון חיובי.

ב) (8 נק') הראה שהפונקציה $w=\ln\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)$ מקיימת את המשוואה הבאה:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

6. א) (10 נק') האם טור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ מתכנס בהחלט? אם לא, האם הוא מתכנס בתנאי?

ב) (10 נק') חשב את האינטגרל הקווי: $\oint_L ydx - xdz$ כאשר $L:\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}$.

28. 7. 13

שאלה 1

א

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln^2(n+1)}{n\ln^2 n}=$$

$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}_{=1}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^2=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right)^2=1$$

$-1<x<1$

$x=1$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$, $a_n\to 0$, מונוטונית יורדת

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_2^A(\ln x)^{-2}\,d(\ln x)=$$

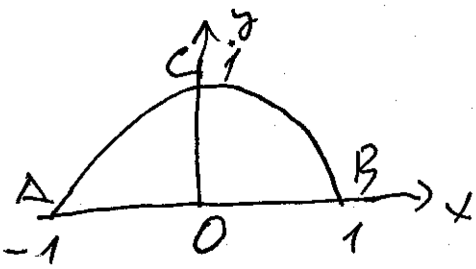
$$=\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_2^A=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln A}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

אינטגרל מתכנס $\Leftarrow$ טור מתכנס.

$x=-1$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln^2 n}\Rightarrow$ מתכנס בהחלט

תחום

$-1\le x\le 1$



$z'_x=y=0,\ z'_y=x=0\Rightarrow$ ב

$M_0(0,0)$

$\underline{AOB}$ $y=0\Rightarrow z=0$

$\underline{ACB}$ $y=\sqrt{1-x^2}$, $z=x\sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$

$$z'_x=\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},\ z'_x=0,$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\Rightarrow M_1\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right),\ M_2\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$z(M_0)=0,\quad z(M_1)=\frac{1}{2},\quad z(M_2)=-\frac{1}{2}$

מקסימום מוחלט $\swarrow$ מינימום מוחלט

<u>שאלה 2</u>

א) נמצא את נקודות של ישר l:

$A\left(0,-\frac{3}{2},0\right)$, $B(2,2,1)$

אז

$$l:\ \frac{x}{2}=\frac{y+\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}}=\frac{z}{1}$$

$\vec{n}_1=\langle 1,-2,1\rangle$, נסמן $\vec{n}$ - נורמל של מישור P

אז $\vec{v}=\langle 2,\frac{7}{2},1\rangle$,

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & \frac{7}{2} & 1\end{vmatrix}=\left\langle -\frac{11}{2},1,\frac{15}{2}\right\rangle$$

משוואת של מישור P:

$$-\frac{11}{2}x+\left(y+\frac{3}{2}\right)+\frac{15}{2}z=0 \Rightarrow -11x+2y+15z+3=0$$

ב)

$$F=e^{xy^2z^3}-\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

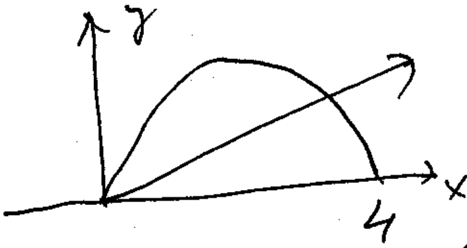
$$F'_z=3xy^2z^2e^{xy^2z^3}-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big|_{M_0}=-1\neq0$$

אז קיימת פונקציה סתומה

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{y^2z^3e^{xy^2z^3}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{-1}\Bigg|_{M_0}=0$$

<u>שאלה 3</u>

א)



$$r=4\cos\varphi$$

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r\sin\varphi\cdot r\,dr=$$

$$=\int_0^{\pi/2}d\varphi\left(\frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^{4\cos\varphi}=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}4^3\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{4^3}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d(\cos\varphi)=-\frac{64}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{16}{3}$$

$$\frac{\partial u}{d\vec{a}} = u'_x a^\circ_x + u'_y a^\circ_y + u'_z a^\circ_z = \operatorname{grad} u \cdot \vec{a}^\circ \; (?$$

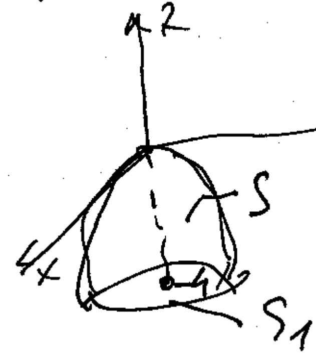
$$\vec{a}^\circ = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\operatorname{grad} u = \{2x - z, \cos y, -x\}\big|_{M_0} = \{5, 0, -1\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\max \left| \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} \right| = |\operatorname{grad} u|_{M_0} = \sqrt{26}$$

<u>4 абке</u>



$$x^2 + y^2 = -z$$

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ ds = \iiint\limits_T \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz - \iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1^\circ ds$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2 + 1) = -1$$

$$-\iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{-4}^{-(x^2+y^2)} 1\,dz =$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4 - r^2)\, r\,dr =$$

$$= -2\pi \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 = -8\pi$$

$$\vec{n}_1^\circ = -k = \{0, 0, -1\}, \quad |\cos\gamma| = 1,$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_1^\circ = z(x^2 + y^2 + 1) = -4(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1^\circ ds = -4 \iint\limits_{D_{xy}} (x^2 + y^2 + 1)\,dx\,dy =$$

$$= -4 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (r^2 + 1)\, r\,dr = -4 \cdot 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= -48\pi \implies \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = -8\pi + 48\pi = 40\pi$$

שאלה 5

$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y \Rightarrow$ שדה משמר $\vec{F}$ (ש

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \underbrace{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}_{=0} - \int_{L_1} \vec{F} d\vec{r}$$

$$\int_{L_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^2 (-x^2)\, dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -\frac{8}{3}$$

$$\left(L_1 : \begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix}, \quad 0 \le t \le 2 \right)$$

$$\int_L \vec{F} d\vec{r} = \frac{8}{3}$$

סוף

(ב

$$u = \ln[(x-a)^2 + (y-b)^2]$$

$$u'_x = \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad u'_y = \frac{2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

$$u''_{xx} = 2\,\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2} = 2\,\frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

$$u''_{yy} = 2\,\frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}$$

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

שאלה 6

א) האם הטור מתכנס בהחלט? כן / לא

מתבדר ⇐ $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

אז $\sum_{n=1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ גם מתבדר ⇐ הטור לא מתכנס בהחלט

ב) האם הטור מתכנס בתנאי? כן /

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}})} = 0$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}\ ,\ x \geq 1,\quad f'_x = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+1)^2} < 0$$

f יורדת לכל x

אז $\langle a_n \rangle$ יורדת ⇐ לפי לייבניץ
מתכנס בתנאי / נכון

ג)

$x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t,\quad z = 2$

$$\int_0^{2\pi} (y x' - x z')\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sin t(-2\sin t)\,dt =$$

$$= -4\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -2\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4\pi$$