<u>חדו״א הנ מכונות 2</u>

מס׳ הקורס 201-1-9721   הנ.מכונות

ד״ר זלצמן ט.
ד״ר אולחא ז.

תרגול 1
טורים מספריים

I. הוכח ישירות, לפי ההגדרה, את התכנסות הטורים הבאים וחשב את סכומיהם

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ 2. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$

3. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$ 4. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$

II. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחן האינטגרל :

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1}$ 2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 3. $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+5}$ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{1+n^2}$

III. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש בתנאי הכרחי להתכנסות הטור ובמבחני השוואה :

1. $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 2. $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\sqrt[4]{0.001}\cdots$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\frac{1}{4\sqrt{5}}+\cdots$ 4. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\frac{1}{4001}+\cdots$

5. $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}+\cdots$ 6. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$

7. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ 8. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}+\frac{1}{\sqrt{7\cdot 9}}+\cdots$

9. $\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\cdots$ 10. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{6\cdot 9}+\cdots$

11. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$

IV. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחן דלמבר:

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$ 2. $\frac{1!}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\frac{4!}{10^4}+\cdots$

3. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\frac{1000^4}{4!}+\cdots$ 4. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\frac{(3!)^2}{6!}+\frac{(4!)^2}{8!}+\cdots$

V. חקור את התכנסות הטורים הבאים תוך שימוש במבחן קושי :

1. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\frac{1}{\ln^3 4}+\frac{1}{\ln^4 5}+\cdots$ 2. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\cdots$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

VI. חקור את התכנסות הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ 4. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$ 7. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$

9. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(4n-1)}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 11. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2-3}{3n^2+1}\right)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ 15. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$

טורים כלליים

VII. בדוק התכנסות בהחלט, בתנאי או התבדרות של הטורים הבאים:

1. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

2. $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots$

3. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$

4. $\frac{\sin\alpha}{1}-\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}-\frac{\sin 4\alpha}{16}+\cdots$

5. $1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots$

6. $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$

7. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\cdots$

8. $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\frac{64}{16}+\frac{125}{32}-\cdots$

9. $\frac{1}{3\ln^2 3}-\frac{1}{4\ln^2 4}+\frac{1}{5\ln^2 5}-\frac{1}{6\ln^2 6}+\cdots$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{3n-1}}{1+\sqrt{5n+67}}$

טורי חזקות

VIII. קבע את תחומי ההתכנסות (בהחלט ובתנאי) עבור הטורים הבאים:

1. $10x+100x^2+1000x^3+\cdots$

2. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$

3. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\frac{x^4}{3^4\cdot 5}+\cdots$

4. $1-\frac{x^2}{5\sqrt{2}}+\frac{x^4}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^6}{5^3\sqrt{4}}+\frac{x^8}{5^4\sqrt{5}}-\cdots$

5. $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+\cdots$

6. $\frac{x-3}{1}-\frac{(x-3)^2}{2^2}+\frac{(x-3)^3}{3^2}-\frac{(x-3)^4}{4^2}+\cdots$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}n!$

9. $\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+\ln^4 x+\cdots$

10. $e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+4e^{4x}+\cdots$

פיתוח פונקציות לטור חזקות

IX. פתח את הפונקציה $f(x)$ לטור מקלורן וקבע את תחום ההתכנסות :

1. $f(x)=\ln(x+2)$ 2. $f(x)=e^{2x}$ 3. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 4. $f(x)=\sin 2x$

5. $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ 6. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ 7. $f(x)=e^{x+4}$ 8. $f(x)=x\ln(1+x)$

תשובות

I . 1) 2/3   2) 3/2   3) 1   4) 1/2

	II	III	IV	V	VI
טור מתכנס	1,3,5	3,6,10,12,14	1,3,4	1,2	1,7,9,11,13,14,15
טור מתבדר	2,4	1,2,4,5,7,8,9,11,13	2	3	2,3,4,5,6,8,10,12

VII.

טור מתכנס בתנאי	טור מתכנס בהחלט	טור מתבדר
1,3,7	2,4,5,8,9	6,10

VIII.

	טור מתכנס בהחלט	טור מתכנס בתנאי
1	$-0.1<x<0.1$	-
2	$-1<x<1$	$x=1$
3	$-3<x<3$	$x=-3$
4	$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$	$x=\pm\sqrt{5}$
5	$-5<x<3$	$x=-5$

	טור מתכנס בהחלט	טור מתכנס בתנאי
6	$2\le x\le 4$	-
7	$-\infty<x<\infty$	-
8	$x=0$	-
9	$\frac{1}{e}<x<e$	-
10	$x<0$	-

IX.

1) $\ln(x+2)=\ln 2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2^2\cdot 2}+\dfrac{x^3}{2^3\cdot 3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n\cdot n}+\cdots \qquad (-2<x\le 2)$

2) $e^{2x}=1+\dfrac{2x}{1!}+\dfrac{4x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{2^n x^n}{n!}+\cdots \qquad (x\in R)$

3) $\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{3^2}+\dfrac{x^2}{3^3}-\dfrac{x^3}{3^4}+\cdots+\dfrac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}}+\cdots \qquad (|x|<3)$

4) $\sin 2x=2x-\dfrac{8x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (x\in R)$

5) $\sqrt{1+x^3}=1+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^6}{2^2\,2!}+\dfrac{3x^9}{2^3\,3!}-\cdots \qquad (|x|<1)$

6) $f(x)=\cos\sqrt{x}=1-\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{(2n)!}+\cdots \qquad (0\le x<\infty)$

7) $f(x)=e^{x+4}=\sum_{n=0}^{\infty}e^4\dfrac{x^n}{n!} \qquad (x\in R)$

8) $f(x)=x\ln(1+x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n-1} \qquad (-1<x\le 1)$

פתרונות

I. 1)$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, a_1 = 1, q = -1/2, S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)} = \dfrac{2}{3}$

4) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1/2}{2n-1} - \dfrac{1/2}{2n+1}$

IV. 4) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{4}$

V. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{2} > 1$

תרגול 2
אלגברה של וקטורים

תרגילים :

1. במקבילית $ABCD$ $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. בטא באמצעות $\vec{b}$, $\vec{a}$ את $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA}$, כאשר M היא נקודת חיתוך האלכסונים .
2. הוקטורים $\vec{a}$ & $\vec{b}$ יוצרים זווית בת 120^0 ו - $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. חשב :
   א. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ב. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ ג. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$ ד. $\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$
3. הוכח את הזהות $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)$ ותן לה פירוש גיאומטרי.
4. חשב את אורכי האלכסונים במקבילית הבנויה על הוקטורים $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, כאשר $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=3$, $\angle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.
5. הוכח כי אלכסוני המעוין ניצבים .
6. נתון $|\vec{s}|=1$, $|\vec{t}|=1$, $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$, $\vec{q}=5\vec{s}-4\vec{t}$, $\vec{q}\perp\vec{p}$. חשב את הזווית בין הוקטורים $\vec{s}$, $\vec{t}$.
7. חשב את $\vec{a}\cdot\vec{b}$ כאשר $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-4\vec{j}-5\vec{k}$.
8. חשב את הזווית בין הוקטורים $\vec{b}$, $\vec{a}$ כאשר $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$.
9. חשב את הזוויות המשולש ABC כאשר $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}+\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{i}+2\vec{j}$. מצא את $\overrightarrow{CA}$.
10. חשב את ההיטל של הוקטור $\vec{a}=10\vec{i}+2\vec{j}$ על הוקטור $\vec{b}=5\vec{i}-12\vec{j}$.
11. חשב את ההיטל של הוקטור $\vec{b}=(1,-1,4)$ על הוקטור $\vec{a}=(1,1,2)$.
12. חשב את האורך של התיכון AM והגובה AD במשולש ABC בעל הצלעות $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}+2\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-4\vec{j}$.
13. חשב את הזוויות המשולש ABC כאשר $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$.
14. מצא נקודה D וזווית בין האלכסונים $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ במקבילית $ABCD$ כאשר $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$.
15. עבור אילו ערכים של α ו- β הוקטורים $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}+\beta\vec{k}$, $\vec{b}=\alpha\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$ קולינאריים ?
16. הוכח כי הנקודות $A(0,0,0)$, $B(2,0,-4)$, $C(2,-1,-1)$, $D(1,-1,1)$ הן קדקודים של טרפז .
17. קדקודיו של משולש הם $A(5,0,1)$, $B(1,-5,2)$, $C(3,-1,0)$. מצא את שיעורי נקודת מפגש התיכונים (מרכז הכבוד של המשולש) .
18. מצא $\left(5\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ כאשר $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.
19. הוכח שהמרובע $ABCD$ הוא ריבוע אם $A(2,1)$, $B(4,0)$, $C(5,2)$, $D(3,3)$.
20. נתון $A(6,-4,2)$, $B(3,2,3)$, $C(3,-5,-1)$. הוכח כי משולש ABC הוא ישר זווית.
21. נתון $A(2,1,-4)$, $B(1,3,5)$, $C(7,2,3)$, $D(8,0,-6)$. הוכח כי $ABCD$ הוא מקבילית.
22. חשב $|2\vec{a}-\vec{b}|$ אם $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^0$.
23. חשב את קוסינוסי הכיוון של $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.
24. וקטור $\vec{a}$ יוצר זווית $\beta=60^0$ עם ציר ה-y , זווית $\gamma=120^0$ עם ציר ה-z וזווית α עם ציר ה-x . חשב $\cos\alpha$.
25. יהיו $A(11,-5,9)$, $B(-8,-1,1)$. מצא וקטור יחידה שכיוונו מ-A ל-B .
26. יהי $A(2,-1,7)$. מצא נקודה B כזאת ש- $AB=34$ והוקטור $\overrightarrow{AB}$ מקביל לוקטור $8\vec{i}+9\vec{j}-12\vec{k}$.
27. חשב את $\vec{a}\times\vec{b}$ כאשר $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.
28. חשב את שטח המשולש ABC כאשר $A(3,6,4)$, $B(4,2,-1)$, $C(2,3,5)$.

.29 חשב את שטח המקבילית הבנויה על וקטורים $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

.30 חשב את שטח המקבילית הבנויה על וקטורים $3\vec{a}+\vec{b}\,,\,\vec{a}+3\vec{b}$ כאשר $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1\,,\ \angle(\vec{a},\vec{b})=30^0$.

.31 נתון $|\vec{n}|=6\,,\ |\vec{m}|=4\,,\ \angle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$. מצא $\left(3\vec{m}-2\vec{n}\right)\cdot\left(5\vec{m}-6\vec{n}\right)$, $\left|\left(3\vec{m}-2\vec{n}\right)\times\left(5\vec{m}-6\vec{n}\right)\right|$.

.32 נתון $\vec{a}=(2,-3,1)\,,\ \vec{b}=(-3,1,2)\,,\ \vec{c}=(1,2,3)$. חשב את $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ ואת $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

.33 חשב את מכפלה מעורבת $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ כאשר $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\,,\ \vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\,,\ \vec{c}=(1,1,4)$.

.34 הוכח כי הוקטורים $\vec{a}=(2,5,7)\,,\ \vec{b}=(1,1,-1)\,,\ \vec{c}=(1,2,2)$ קופלנריים .

.35 מצא נפח של פירמידה $ABCD$ כאשר $A(2,2,2)\,,\ B(4,3,3)\,,\ C(4,5,4)\,,\ D(5,5,6)$.

.36 הוכח כי הנקודות $A(1,2,1)\,,\ B(1,1,1)\,,\ C(2,1,2)\,,\ D(2,2,2)$ נמצאות על מישור אחד.

.37 הוכח: אם $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, אזי $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ קופלנריים .

.38 הוכח שהוקטור $\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\vec{a}^2}$ מאונך לוקטור $\vec{a}$.

תשובות :

1) $\overrightarrow{MD}=0.5(\vec{b}-\vec{a})\,,\ \overrightarrow{MC}=0.5(\vec{a}+\vec{b})\,,\ \overrightarrow{MB}=0.5(\vec{a}-\vec{b})\,,\ \overrightarrow{MA}=-0.5(\vec{a}+\vec{b})$

2) $-6\,,9\,,13\,,43$ 4) $\sqrt{593}$ 6) $\dfrac{\pi}{3}$ 7) 9 8) $\dfrac{\pi}{4}$ 9) $\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\ \overrightarrow{CA}=(1,-3)$

10) $pr_{\vec{b}}\,\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=2$ 11) $pr_{\vec{a}}\,\vec{b}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}$ 12) $|\overrightarrow{AM}|=6\,,\ \overrightarrow{BA}_{\overrightarrow{BC}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,,\ |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{28.8}$

13) $\cos(\hat{A})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$, $\hat{A}=\dfrac{\pi}{2}$, $\hat{B}=\hat{C}=\dfrac{\pi}{4}$ 14) $D(-1,1,1)\,,\ 120^0$

15) $\alpha=-7.5\,,\ \beta=-0.8$ 17) $(3,-2,1)$ 18) 13 22) 2 23) $\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}$

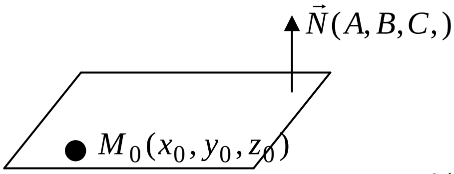
24) $45^0\ ,135^0$ 25) $\left(-\dfrac{19}{21},\dfrac{4}{21},\dfrac{-8}{21}\right)$ 26) $(-14,-19,31)\,,\ (18,17,-17)$

27) $(-7,3,1)$ 28) $\dfrac{\sqrt{426}}{2}$ 29) 49 30) 4 31) $336\,,\ 96\sqrt{3}$

32) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=7(-1,2,-1),\quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(10,13,19)$

33) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=33$ 35) $V=\dfrac{7}{6}$

תרגול 3
גיאומטריה אנליטית במרחב



I מישור

1. המשוואה הכללית של מישור : $Ax+By+Cz+D=0$
2. המשוואה של מישור שעובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$
ומאונך לוקטור $\vec{N}(A,B,C)$: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
3. α זווית בין מישורים (1), (2) אם $\overline{N}_1,\ \overline{N}_2$ וקטורים מאונכים למישורים (1), (2) :

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2\right|}{\left|\overline{N}_1\right|\cdot\left|\overline{N}_2\right|}$$

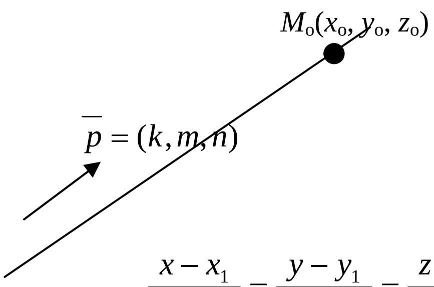
א) אם $\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2$ כלומר $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ אזי מישורים מקבילים

ב) אם $\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2$ כלומר $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ אזי מישורים מאונכים

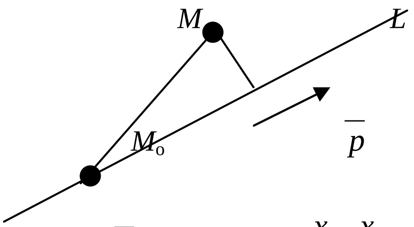
3. מרחק מנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$: $d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

II ישר במרחב

1. ישר כחיתוך של שני מישורים (משוואה כללית) $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$



2. משוואה קנונית של הישר $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$
3. משוואה פרמטרית של הישר $\begin{cases}x=x_0+kt\\y=y_0+mt\\z=z_0+nt\end{cases}$
4. ישר העובר דרך שתי נקודות $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$



5. α זווית בין הישרים : $\cos\alpha=\frac{\overline{p}_1\cdot\overline{p}_2}{\left|\overline{p}_1\right|\cdot\left|\overline{p}_2\right|}$
6. מרחק מנקודה M לישר L : $d=\frac{\left|\overline{M_0M}\times\overline{p}\right|}{\left|\overline{p}\right|}$

III מצב הדדי של ישר ומישור נתונים הישר $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, $\overline{p}=(k,m,n)$

והמישור $Ax+By+Cz+D=0$ $\quad \overline{N}=(A,B,C)$

1. הישר מקביל למישור $Ak+Bm+Cn=0$ (כלומר $\overline{N}\perp\overline{p}$)
2. הישר מאונך למישור $\frac{A}{k}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ (כלומר $\overline{N}\parallel\overline{p}$)
3. α זווית בין ישר למישור : $\sin\alpha=\frac{\overline{N}\cdot\overline{p}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{p}|}$

תרגילים :

3. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $(3,-2,5)$ ומאונך לוקטור $(4,-3,1)$.

4. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות $(1,2,-1)$ ו- $(-5,2,7)$ ומקביל ל-
א. ציר x ב. ציר y ג. הוקטור $2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

39. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודות :
א. $(4,1,1),(2,3,1),(1,0,-1)$ ב. $(0,1,-5),(1,-2,2),(2,0,-1)$.

40. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה $(1,-1,2)$ ומקביל למישור המשולש בעל הקדקודים $C(3,0,1), B(-1,2,3), A(1,0,0)$.

41. חשב את המרחק מהנקודה $A(3,9,1)$ למישור $x-2y+2z-5=0$.

42. על הציר x מצא נקודה הנמצאת במרחק שווה מן המישורים $2x+2y-z=1\,, 12x-16y+15z+1=0$.

43. מצא את משוואת המישור המקביל למישור $3x+6y-2z=7$ שמרחקו מהנקודה $(1,-1,2)$ שווה ל- 3 .

44. חשב נפח הפירמידה החסומה על ידי המישורים $z=0\,, y=0\,, x=0\,, 3x-6y+2z=12$.

45. מצא את קוסינוס הזווית החדה בין המישורים $x+2y+2z+1=0\,, 15x+12y-16z=1$.

46. עבור אילו ערכים של α המישורים $2x+\alpha y+z=1\,, 2x+y+z=3$
א. מאונכים , ב. מקבילים ?

47. חשב את המרחק בין שני מישורים מקבילים : $4x+6y-12z+16=0\,, 2x+3y-6z+5=0$

48. מצא את משוואת הישר העובר דרך
א. הנקודות $(3,5,2),(2,1,3)$
ב. הנקודה $(2,1,4)$ ומקביל לוקטור $\bar{p}=2\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$
ג. הנקודה $(3,1,-2)$ ומאונך למישור $x+y-2z=2$

49. מצא את משוואת המישור העובר דרך שני הישרים המקבילים
$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-2},\quad \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-2}\ .$$

50. מצא זווית בין ישרים $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+5}{3}$ ו- $\left.\begin{matrix}2x-y+3z=1\\5x+4y-z=7\end{matrix}\right\}$

51. חשב את המרחק מנקודה $(1,-1,3)$ לישר $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$

52. מצא את משוואת הישר העובר דרך נקודה $(1,1,1)$ ומאונך לוקטורים : $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}\,, \vec{b}=(3,1,2)$

53. מצא את נקודת החיתוך של הישר $\frac{x+4}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ והמישור $2x+3y-z=5$.

54. מצא היטל של הנקודה $A(2,-3,4)$ על המישור $x+2y+2z=13$.

55. כתוב את המשוואה הקנונית של הישר הנתון על ידי שני המישורים :
$$x-y+3z=1\,, 3x+2y-z-3=0$$

56. מצא נקודה סימטרית לנקודה $P(2,-3,4)$ ביחס למישור $3x+4y+5z+36=0$.

57. מצא נקודה סימטרית לנקודה $P(4,3,10)$ ביחס לישר $z=3+5t, y=2+4t, x=1+2t$.

58. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה $(0,1,-1)$ המקביל לקו החיתוך של המישורים :
$$3x+y-2z=2\,, 2x-y+3z+7=0$$

59. הוכח כי הישרים $x=2t-3,\ y=3t-2,\ z=6-4t$ ו- $x=t+5,\ y=-4t-1,\ z=t-4$ נחתכים. מצא את נקודת החיתוך.

60. יהי D המישור המוגדר ע"י המשוואה $7x+3y+2z=1$. מצא את הנקודה Q במישור D הקרובה ביותר לנקודה $P(1,0,-1)$; הרכב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות P ו - Q ; וחשב המרחק PQ .

61. נתונות 4 נקודות במרחב : $A(0,2,4); B(-2,6,-2); C(2,-4,8); D(10,2,0)$. הרכב את משוואת הישר AK כאשר K זה היטלה של D על המישור ABC .

גיאומטריה אנליטית במישור

62. צייר את הגרפים של הקווים הבאים :

$a. x^2+y^2=5$ $\quad b. x^2+y^2=4x$ $\quad c. x^2+y^2=6y$ $\quad d. \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$e. \dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-5)^2}{4}=1$ $\quad f. 4x^2-9y^2=36$ $\quad g. 4x^2-9y^2=-36$ $\quad h. y=2(x-1)^2-3$

$i. x=-0.5(y+1)^2+4$ $\quad j. 2y+x^2-4x=6$

תשובות :

1) $4x-3y+z=23$ 2) א. $y=2$ ב. $4x+3z=1$ ג. $4x+5y+3z=11$

3) א. $x+y-2z-3=0$ ב. $x-2y-z-3=0$

4) $x+4y-2z+7=0$ 5) 6 6) $(2,0,0)$, $(11/43,0,0)$

7) $3x+6y-2z=14$, $3x+6y-2z+28=0$ 8) 8 9) $7/75$ 10) $\begin{cases} \text{א. } \alpha=-5 \\ \text{ב. } \alpha=1 \end{cases}$

11) $3/7$ 12) א. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+4t \\ z=3-t \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1+5t \\ z=4+8t \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=-2-2t \end{cases}$ 13) $3x-2y+3z+1=0$

14) $\cos\alpha=\dfrac{34}{\sqrt{8106}}$ 15) $\sqrt{\dfrac{69}{14}}$ 16) $\begin{cases} x=1+5t \\ y=1-t \\ z=1-7t \end{cases}$ 17) $(-3,3,-2)$ 18) $(3,-1,6)$

19) $x=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ 20) $(-4,-11,-6)$ 21) $(2,9,6)$ 22) $x=\dfrac{y-1}{-13}=\dfrac{z+1}{-5}$ 23) $(3,7,-6)$

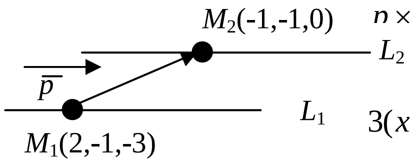
24) $Q\left(\dfrac{17}{31},\dfrac{-6}{31},\dfrac{-35}{31}\right)$, $(PQ):\begin{cases} x=1+7t \\ y=3t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $PQ=\dfrac{4}{\sqrt{62}}=\dfrac{2\sqrt{62}}{31}$ 25) $(AK):\begin{cases} x=0 \\ y=2t \\ z=2+2t \end{cases}$

פתרונות :

4. $\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,8,-4) \Rightarrow \overline{N}=(1,4,-2),\quad 1(x-1)+4(y+1)-2(z-2)=0$

11. ניקח נקודה על מישור $4x+6y-12z+16=0$, למשל $(-4,0,0)$. לכן $d=\dfrac{|-8+0-0+5|}{\sqrt{49}}=\dfrac{3}{7}$

13.

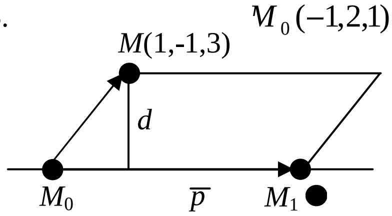


$$\bar n \times \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (9,-6,9) \Rightarrow N=(3,-2,3)$$

$$3(x-2)-2(y+1)+3(z+3)=0$$

14. $\bar p_{l_1}=(2,1,3),\quad \bar p_{l_2}=\bar N_1\times \bar N_2 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-11,17,13)$, $\cos\alpha = \dfrac{\bar p_{l_1}\cdot \bar p_{l_2}}{|\bar p_{l_1}|\cdot|\bar p_{l_2}|} = \dfrac{34}{\sqrt{8106}}$

15.



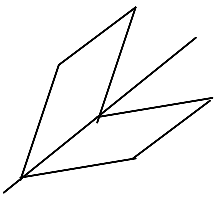
$M_0(-1,2,1)$, $\overline{M_0M_1}=\bar p=(2,-1,3)$, $\overline{M_0M}=(2,-3,2)$

$\overline{M_0M}\times \bar p=(-7,-2,4)$, $d=\dfrac{|\overline{M_0M}\times \bar p|}{|\bar p|}=\sqrt{\dfrac{69}{14}}$

18. א) $\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t-3 \\ z=2t+4 \end{cases} \Leftarrow \bar p=(1,2,2)$

ב) $\begin{cases} (t+2)+2(2t-3)+2(2t+4)=13 \\ t=1 \\ x=3,\ y=-1,\ z=6 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x+2y+2z=13 \\ x=t+2 \\ y=2t-3 \\ z=2t+4 \end{cases}$

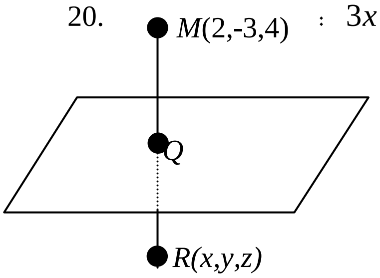
19.



א) הוקטור בכיוון הישר $\bar p=\bar N_1\times \bar N_2 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (5,-10,-5)$

ב) נקודה על הישר אם $x=0$: $\begin{cases} x=0 \\ -y+3z=1 \\ 2y-z=3 \end{cases} \Rightarrow (0,2,1)$. לכן משוואת הישר היא $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

20.



א) משוואת הישר MR המאונך למישור $3x+4y+5z=-36$:

$(MR)\quad x=3t+2,\ y=4t-3,\ z=5t+4$

ב) נק׳ חיתוך הישר והמשור : $Q(-1,-7,-1)$, $t=-1$

ג) $MQ=RQ \Rightarrow \dfrac{x+2}{2}=-1,\ \dfrac{y-3}{2}=-7,\ \dfrac{z+4}{2}=-1 \Rightarrow R(-4,-11,-6)$

תרגול 4

פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי

I. מצא את הגרף של פונקציות וקטוריות ועבור מן ההצגה הפרמטרית הנתונה להצגה קרטזית

$1.\vec r(t)=t\,\vec i-4t\,\vec j,\ -\infty<t<\infty$ $\qquad 2.\vec r(t)=5\cos t\,\vec i+5\sin t\,\vec j,\quad 0\le t<2\pi$

$3.\vec r(t)=2\cos t\,\vec i+3\sin t\,\vec j,\quad 0\le t<2\pi$ $\qquad 4.\vec r(t)=t\,\vec i+(3t^2+1)\,\vec j,\ -\infty<t<\infty$

$5.\ \vec r(t)=(3+2\cos t)\,\vec i+(2+4\sin t)\,\vec j,\ 0\le t<2\pi$ $\qquad 6.\vec r(t)=\cos^3 t\,\vec i+\sin^3 t\,\vec j,\quad 0\le t<2\pi$

מצא את הגרף של פונקציות וקטוריות הבאות :

$7.\ \vec r(t)=a(t-\sin t)\,\vec i+a(1-\cos t)\,\vec j\ ,\ a>0$

$8.\ \vec r(t)=4\cos t\,\vec i+3\sin t\,\vec j+t\,\vec k,\ -\infty<t<\infty$

II. מצא את ההצגה הוקטורית של עקומות הבאות :

$9.\ y=\sin x,\quad -\infty<x<+\infty$ $\qquad 10.\ x^{2/3}+y^{2/3}=4$ $\qquad 11.\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

$12.\ 64x^2+9y^2=1$ $\qquad 13.\begin{cases}x-y+z-2=0\\2x-y-z-1=0\end{cases}$ $\qquad 14.\begin{cases}x^2=z\\y^2=x\end{cases}$

.15 גזור את פונקציה $\vec r(t)=0.5\tan^4 2t\,\vec i-t\cos 3t\,\vec j+\ln 4t\,\vec k$

.16 מצא משוואת המשיק לעקומות :

1.16 $\vec r(t)=(te^{-t}+3)\vec i+\sqrt{4+5t}\,\vec j+(\arctan 2t)\vec k$ בנקודה המתאימה ל- $t=0$.

2.16 $\vec r(t)=2\cos t\vec i+3\sin t\,\vec j+t\,\vec k$ בנקודה $M(2,0,0)$.

3.16 $\begin{cases}z=x^2\\x=y^2\end{cases}$ בנקודה $M(1,1,1)$.

.17 על עקומה $\vec r(t)=t^2\,\vec i+t\,\vec j+5\vec k$ מצא נקודה שבה ישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z=3$.

.18 עבור $\vec r(t)=\cos 2t\,\vec i+\sin 2t\,\vec j+t^2\,\vec k$ מצא את $\dfrac{d\vec r}{dt},\left|\dfrac{d\vec r}{dt}\right|,\dfrac{d|\vec r|}{dt}$.

.19 נקודה נעה לאורך העקומה $\vec r(t)=2\cos t\,\vec i+3\sin t\,\vec j+4t\,\vec k$. חשב את המהירות $\vec r\,'(t)$ ואת התאוצה $\vec r\,''(t)$ בזמן $t=\pi/2$.

.20 מצא את הזווית בין ווקטורי המהירות $\vec r\,'(t)$ והתאוצה $\vec r\,''(t)$ בזמן $t=0$ אם $\vec r(t)=\ln(t^2+1)\,\vec i+\arctan t\,\vec j+\sqrt{t^2+1}\,\vec k$.

.21 חלקיק נע לפי חוק התנועה

$\vec r(t)=(\cos\alpha\,\cos\omega t)\vec i+(\sin\alpha\ \cos\omega t)\,\vec j+(\sin\omega t)\,\vec k$ $\quad(\omega>0)$.

מצא את מהירות $\vec v(t)$, תאוצה $\vec w(t)$ וערכים שלהן $\left(|\vec w(t)|,|\vec v(t)|\right)$.

.22 מהירות $\vec v(t)$ של חלקיק משתנה לפי החוק $\vec v(t)=(2,-1,-10t)$. ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $\vec r(0)=(0,0,100)$. מצא את משוואת תנועה $\vec r=\vec r(t)$ של החלקיק .

.23 תאוצה של חלקיק תלויה בזמן לפי נוסחה $\vec w(t)=18\cos 3t\,\vec i-18\sin 3t\,\vec j$. רדיוס-וקטור תחילתי ומהירות התחלתית של חלקיק הם $\vec r(0)=(2,0,1)\ \&\ \vec v(0)=(0,2,4)$. מצא משוואת התנועה של החלקיק .

.24 נתון רדיוס-וקטור של נקודה כפונקציה של זמן : $\vec r(t)=\vec v_0\,t-\dfrac{1}{2}gt^2\,\vec k$

($\vec v_0=\vec v(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ מהירות התחלתית) . מצא את מהירות, תאוצה וערכים שלהן.

25. חשב וקטור המשיק יחידה ב t_0 הנתון.

1.25 $\vec{r}(t) = (\sin t, e^t, t^2)\,,\ t_0 = 0$

2.25 $r(t) = (2\ln(t+1), t^2, 0.5t^2)\,,\ t_0 = 1$

26. חלקיק נע לפי חוק התנועה $\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$ $(R > 0, \omega > 0)$.
מצא את מהירות $\vec{v}(t)$, תאוצה $\vec{w}(t)$ ערכים שלהן $(|\vec{w}(t)|, |\vec{v}(t)|)$, וקטור המשיק יחידה, וקטור תאוצה יחידה

27. מצא את הנגזרת של

$$a)\ \vec{r}(t)\cdot\vec{p}(t) \qquad b)\ f(t)\,\vec{r}(t) \qquad c)\ \vec{r}^{\,2}(t) \qquad d)\ \vec{r}(t)\times\vec{p}(t) \qquad e)\ (\vec{r}(t)\times\vec{p}(t))\cdot\vec{h}(t)$$

IV. קואורדינטות קוטביות

שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות במערכת קוטבית :

$1.\ r = 2 \qquad 2.\ r = \theta, 0 \le \theta \le 4\pi \qquad 3.\ r = 2(1+\cos\theta) \qquad 4.\ r = 1/\theta, 0.5\pi \le \theta \le 3\pi$

$5.\ r = 2/\cos\theta \qquad 6.\ r = 2/\sin\theta \qquad 7.\ r = 2\sin\theta \qquad 8.\ r = 2\cos\theta \qquad 9.\ r = 2(1-\cos\theta)$

רשום בקאורדינטות קוטביות המשוואות הבאות :

$10.\ x = 3 \quad 11.\ x^2 + y^2 = 4x \quad 12.\ y = 5 \quad 13.\ x^2 + y^2 = 3y \quad 14.\ x + 2y = 5 \quad 15.\ x^2 + y^2 = 9$

$16.\ (x^2 + y^2)^2 = 4xy \quad 17.\ y^2 = 4x \quad 18.\ (x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$

רשום בקאורדינטות קרטזיות את המשוואות הבאות :

$19.\ r = 2\cos\theta \quad 20.\ r = 3/\sin\theta \quad 21.\ \theta = \pi/2 \quad 22.\ \sin\theta = r\cos^2\theta \quad 23.\ r^2\cos 2\theta = \tan\theta$

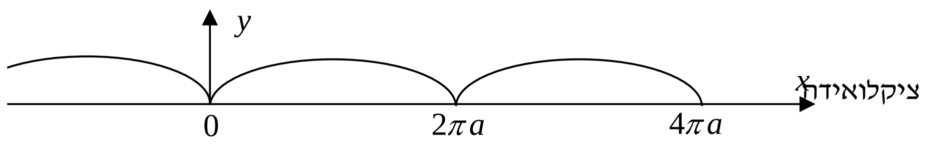
תשובות

I.

$1)\ y = -4x \quad 2)\ x^2 + y^2 = 25 \quad 3)\ 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad 4)\ y = 3x^2 + 1$

$5)\ \dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1 \qquad 6)\ x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

7)



8) $9x^2 + 16y^2 = 144$ קצה של $\vec{r}(t)$ נע לאורך ספירלה הנמצאת מעל גליל אליפטי

II.

$9)\ \vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}\,, -\infty < t < \infty \qquad 10)\ \vec{r}(t) = 8\cos^3 t\ \vec{i} + 8\sin^3 t\ \vec{j}\ ,0 \le t < 2\pi$

$11)\ \vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (1-t)^2\,\vec{j}\ ,\ 0 \le t \le 1 \qquad 12)\ \vec{r}(t) = \dfrac{\cos t}{8}\vec{i} + \dfrac{\sin t}{3}\vec{j}\ ,0 \le t < 2\pi$

$13)\ \vec{r}(t) = (-1+2t)\,\vec{i} + (-3+3t)\,\vec{j} + t\,\vec{k}\,, -\infty < t < \infty \qquad 14)\ \vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t^4\,\vec{k}\,, -\infty < t < \infty$

III.

15) $\vec r\,'(t)=\dfrac{4\sin^3 2t}{\cos^5 2t}\,\vec i+(3t\sin 3t-\cos 3t)\,\vec j+\dfrac{\vec k}{t}$

16.1) $\vec r=(3,2,0)+(1,1.25,2)\,t$ 16.2) $\begin{cases}x=2\\ y=3t\\ z=t\end{cases}$ 16.3) $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+t\\ z=1+4t\end{cases}$ 17) $M(9,3,5)$

18) $\vec r\,'(t)=-2\sin 2t\,\bar i+2\cos 2t\,\bar j+2t\,\bar k$, $\left|\vec r\,'(t)\right|=2\sqrt{1+t^2}$, $\left(\left|\vec r(t)\right|\right)'=\dfrac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}$

19) $\vec r\,'(\pi/2)=-2\,\vec i+4\,\vec k$ $\vec r\,''(\pi/2)=-3\,\vec j$ 20) $\angle(\vec r\,'(0),\vec r\,''(0))=\pi/2$

21) $\vec v\,(t)=\omega\,(\cos\alpha\ \sin\omega t,\sin\alpha\sin\omega t,\cos\omega t),|\,\vec v\,(t)\,|=\omega$

$\vec w\,(t)=-\omega^2\,\vec r\,(t)$, $|\,\vec w\,(t)\,|=\omega^2$

22) $\vec r\,(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$ 23) $\vec r\,(t)=(4-2\cos 3t,2\sin 3t-4t,4t+1)$

24) $\vec v(t)=(v_{01},v_{02},v_{03}-g\,t),\ \vec w(t)=(0,0,-g),|\,\vec v(t)\,|=\sqrt{\vec v_0^{\,2}-2v_{03}\,g\,t+g^2t^2},|\,\vec w(t)\,|=g$

25.1) $\dfrac{(1,1,0)}{\sqrt2}$ 25.2) $\dfrac{(1,2,1)}{\sqrt6}$

26) $\vec v(t)=R\,\omega\,(-\sin\omega t,\cos\omega t)$, $\vec w(t)=-\omega^2\vec r\,(t)$, $|\,\vec v(t)\,|=R\,\omega$, $|\,\vec w(t)\,|=R\,\omega^2$,

$\dfrac{\vec v(t)}{|\,\vec v(t)\,|}=(-\sin\omega t,\cos\omega t)$, $\dfrac{\vec w(t)}{|\,\vec w(t)\,|}=-(\cos\omega t,\sin\omega t)$

27. $a)(\,\vec r\,(t)\cdot\vec p\,(t))'=\vec r\,'(t)\cdot\vec p\,(t)+\vec r\,(t)\cdot\vec p\,'(t)$ $b)\ (\,f\,(t)\,\vec r\,(t))'=f\,'(t)\,\vec r\,(t)+f\,(t)\,\vec r\,'(t)$

$c)(\,\vec r^{\,2}\,(t))'=2\,\vec r\,(t)\cdot\vec r\,'(t)$ $d)\ (\vec r\,(t)\times\vec p\,(t))'=\vec r\,'(t)\times\vec p\,(t)+\vec r\,(t)\times\vec p\,'(t)$

$e)\ ((\vec r\,(t)\times\vec p\,(t))\cdot\vec h\,(t))'=$

$$(\vec r\,'(t)\times\vec p\,(t))\cdot\vec h\,(t)+(\vec r\,(t)\times\vec p\,'(t))\cdot\vec h\,(t)+(\vec r\,(t)\times\vec p\,(t))\cdot\vec h\,'(t)$$

IV.

10) $r=3/\cos\theta$ 11) $r=4\cos\theta$ 12) $r=5/\sin\theta$

13) $r=3\sin\theta$ 14) $r=5/(\cos\theta+2\sin\theta)$ 15) $r=3$

16) $r^2=2\sin 2\theta$ 17) $r=4\cos\theta/\sin^2\theta$ 18) $r^2=8\cos 2\theta$

19) $x^2+y^2=2x$ 20) $y=3$ 21) $x=0\ \ (y>0)$

22) $y=x^2$ 23) $x^2-y^2=y/x$

תרגול 5

פונקציות של מספר משתנים

I נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^2y+\dfrac{y^2}{x}$. חשב :

$a)\ f(1,-1)$ $b)\ f\left(\dfrac{1}{3},2\right)$ $c)\ f(y,x)$ $d)\ f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right)$ $e)\ f(-x,-y)$

II מצא את התחום ההגדרה של פונקציות :

1. $v(x,y)=x+\sqrt{y}$
2. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$
3. $g(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$
4. $h(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
5. $k(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$
6. $v(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-x)/(2x-x^2-y^2)}$
7. $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$
8. $g(x,y)=\ln(-x-y)$
9. $v(x,y)=\ln(-x+y)$
10. $u(x,y,z)=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$
11. $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$
12. $g(x,y)=\sqrt{\ln\dfrac{4}{x^2+y^2}}+x^2y\sqrt{x^2+y^2-4}$
13. $h(x,y)=\arcsin\dfrac{y}{x}$
14. $v(x,y)=\arccos\dfrac{x}{x+y}$
15. $g(x,y)=\arcsin(x/y^2)+\arcsin(1-y)$
16. $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$
17. $v(x,y,z)=\ln(xyz)$
18. $g(x,y,z)=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$

III בנה את קווי הרמה של הפונקציות (או קווי הגובה) :

1. $g(x,y)=x+y$
2. $f(x,y)=x^2+y^2$
3. $v(x,y)=x^2-y^2$
4. $h(x,y)=(x+y)^2$
5. $g(x,y)=\dfrac{y}{x}$
6. $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$
7. $v(x,y)=\sqrt{x\,y}$
8. $h(x,y)=e^{2x/(x^2+y^2)}$
9. $f(x,y)=1-|x|-|y|$

IV תאר את משטחי הרמה של הפונקציות (או משטחי הגובה) :

1. $f(x,y,z)=x+y+z$
2. $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$
3. $v(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$
4. $g(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$
5. $h(x,y,z)=\tan(x^2+y^2-2z^2)$
6. $f(x,y,z)=7^{2x+3y-z}$

V נגזרות חלקיות

חשב את הנגזרת מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

1. $u(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^3+5$
2. $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}+e^{2xy}$
3. $u(x,y)=x\sin(2x+3y)$
4. $v(x,y)=x^y$
5. $u(x,y)=(5x^2y-y^3+7)^3$
6. $f(x,y)=\ln(x+y^2)+5^{xy^2}$
7. $f(x,y)=(1+xy)^y$
8. $v(x,y)=\ln(x+\ln y)$
9. $u(x,y,z)=x^{y/z}$
10. $g(x,y)=e^{-x/y}+3$
11. $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$
12. $v(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
13. $h(x,y)=(1+\log_y x)^3$
14. $g(x,y)=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)=?$ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2)=?$

VI נגזרות חלקיות של פונקציה מורכבת, כלל השרשרת

1. נתון

$.U(t)=u(f(t),g(t),h(t)),\quad h(t)=t^3,\ g(t)=e^{-t},\ f(t)=\sin 4t,\quad u(x,y,z)=x^2+y^2+xz$

חשב $U'(t)$.

2. נתון $V(t)=v(f(t),g(t)),\quad g(t)=\ln(t^2+\ln 5t),\ f(t)=te^{2t},\ v(x,y)=x/y$.

חשב $V'(t)$.

3. נתון $Z(x,y)=z(f(x,y),g(x,y))\quad g(x,y)=y/x,\ f(x,y)=x/y\quad, z(u,v)=u^2\ln v$

חשב $\partial Z/\partial y, \partial Z/\partial x$

4. $.U(x)=u(x,v(x)),\quad v(x)=x^3,\ u(x,y)=\ln(e^x+e^y)$

חשב dU/dx .

5. $Z(t)=z(t, f(\mathrm{t}), v(\mathrm{t}))\quad v(\mathrm{t})=\sqrt{t},\ f(\mathrm{t})=1/t,\quad z(t,x,y)=\tan(3t+2x^2-y)$

חשב $\partial z/\partial t,\quad dZ/dt$.

6. $Z(u,v)=z(f(u,v),g(u,v)),\quad g(u,v)=u\cos v,\ f(u,v)=u\sin v,\ z(x,y)=\arctan(x/y)$

חשב $\partial Z/\partial v\quad,\quad \partial Z/\partial u$.

7. $.U(t)=u(f(t),g(t)),\quad g(t)=t\sin t,\ f(t)=t\cos t, u(x,y)=e^{xy^2}$

חשב $U'(\pi/2)$.

8. הוכח כי אם $z(x,y)=f(x^2-y^2)$ גזירה אזי מתקיים השוויון $y(\partial z/\partial x)+x(\partial z/\partial y)=0$

9. הוכח כי אם $z(x,y)=e^y f(ye^{x^2/(2y^2)})$ גזירה אזי מתקיים השוויון

$$(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$$

10. הוכח כי אם $u(x,y,z)=f(x^2z-yz)$ גזירה אזי מתקיים השוויון

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}-2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

11. הוכח כי אם $u(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$ גזירה אזי מתקיים השוויון

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

תשובות

I. $a)\,0$ $b)\,\frac{110}{9}$ $c)\,\frac{xy^3+x^2}{y}$ $d)\,\frac{x^3+y}{x^2y^2}$ $e)\,-x^2y-\frac{y^2}{x}$

II. 1. $y \ge 0$ 2. $|x| \le 1, |y| \ge 1$ 3. $x^2+y^2 \le 1$ 4. $x^2+y^2 > 1$ 5. $1 \le x^2+y^2 \le 4$

6. $x \le x^2+y^2 < 2x$ 7. $|x^2+y| \le 1$ 8. $x+y<0$ 9. $y>x$ 10. $x^2+y^2+z^2 \le a^2$

11. $|x| \le y^2,\, y \ne 0$ 12. $x^2+y^2=4$ 13. $|y| \le |x|, x \ne 0$

14. $\{y \ge 0, y \ge -2x, x^2+y^2 \ne 0\} \cup \{y \le 0, y \le -2x, x^2+y^2 \ne 0\}$

15. המשולש העקום החסום ע"י הפרבולות $y^2=-x,\, y^2=x$
והישר $y=2$ (לא כולל את הראשית)

16. $2\pi k \le x^2+y^2 \le \pi(2k+1), k=0,1,2,\ldots$

17. $\{x>0, y>0, z>0\} \cup \{x>0, y<0, z<0\} \cup \{x<0, y>0, z<0\} \cup \{x<0, y<0, z>0\}$

18. $\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2<-1\}$
החלק הפנימי של ההיפרבולויד דו-יריעתי $x^2+y^2-z^2=-1$

III. 1. $x+y=c$ ישרים מקבילים 2. $c \ge 0,\, x^2+y^2=c$ מעגלים

3. $x^2-y^2=c$ משפחת היפרבולות שוות שוקיים בעלות אסימפטוטות משותפות: $y=\pm x$
וזוג הישרים $y=\pm x$ עצמו

4. $c \ge 0, x+y=\sqrt{c}$ ישרים מקבילים 5. אלומת ישרים $y=cx$ ללא הראשית

6. $\frac{x^2}{1/c}+\frac{y^2}{1/(2c)}=1,\, c>0$ משפחת אליפסות

7. $\{c=0: y=0 \quad or \quad x=0\}$ & $\{c \ne 0: xy=c^2\}$ משפחת היפרבולות

8. $x^2+y^2=c_1x$ אלומת מעגלים העוברים דרך הראשית (ללא הראשית)

9. $|x|+|y|=c_1$ $(c_1 \ge 1)$ ריבועים

IV. 1. $x+y+z=c$ משפחת מישורים מקבילים

2. $c>0,\, x^2+y^2+z^2=c$ משפחת ספירות, ו $c=0$ עבור $(0,0,0)$ נקודה

3. $x^2+y^2-z^2=c$ משפחת היפרבולוידים דו-יריעתיים עבור $c<0$
משפחת היפרבולוידים חד-יריעתיים עבור $c>0$
חרוט עבור $c=0$

4. $x^2-y^2-z^2=c$ משפחת היפרבולוידים דו-יריעתיים עבור $c>0$
משפחת היפרבולוידים חד-יריעתיים עבור $c<0$
חרוט עבור $c=0$

5. $x^2+y^2-2z^2=c$, $c \ne \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$

6. $2x+3y-z=c_1$ משפחת מישורים מקבילים

V.

1. $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^3, \frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-12x^2y^2$ 2. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y^2}+2ye^{2xy}, \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2x}{y^3}+2xe^{2xy}$

3. $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(2x+3y)+2x\cos(2x+3y), \frac{\partial u}{\partial y}=3x\cos(2x+3y)$

4. $\frac{\partial v}{\partial x}=yx^{y-1}, \ \frac{\partial v}{\partial y}=x^y\ln x$

5. $\frac{\partial u}{\partial x}=30xy(5x^2y-y^3+7)^2, \ \frac{\partial u}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$

6. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y^2}+5^{xy^2}y^2\ln 5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x+y^2}+5^{xy^2}2xy\ln 5$

7. $\frac{\partial f}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}, \ \ln f=y\ln(1+xy)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right)(1+xy)^y$

8. $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{x+\ln y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{(x+\ln y)y}$ 10. $\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{e^{-x/y}}{y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{xe^{-x/y}}{y^2}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$ 12. $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{|y|}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x\,y}{|y|(x^2+y^2)}$

13. $\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{3(1+\log_y x)^2}{x\ln y}, \quad \log_y x=\frac{\ln x}{\ln y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{3(1+\log_y x)^2\ln x}{y\ln^2 y}$

VI

1. $dU/dt=4(2x+z)\cos 4t-2ye^{-t}+3xt^2=4(2\sin 4t+t^3)\cos 4t-2e^{-2t}+3t^2\sin 4t$

2. $\frac{dV}{dt}=\frac{e^{2t}(1+2t)}{y}-\frac{x}{y^2}\frac{2t+1/t}{t^2+\ln 5t}=\cdots$

3. $\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{2u\ln v}{y}-\frac{u^2}{v}\frac{y}{x^2}=\cdots, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{2xu\ln v}{y^2}+\frac{u^2}{v}\frac{1}{x}=\cdots$

4. $\frac{dU}{dx}=\frac{e^x+3e^yx^2}{e^x+e^y}=\cdots$

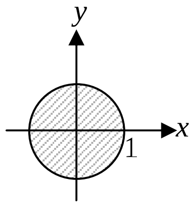
5. $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{3}{\cos^2(3t+2x^2-y)}=\cdots, \ \frac{dZ}{dt}=\frac{3-4x/t^2-0.5/\sqrt{t}}{\cos^2(3t+2x^2-y)}=\cdots$

6. $\partial Z/\partial u=(y\sin v-x\cos v)/(x^2+y^2)=\cdots$

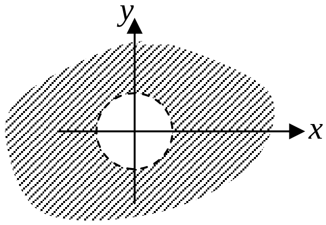
7. $\frac{dU}{dt}(\pi/2)=-\pi^3/8$

I.

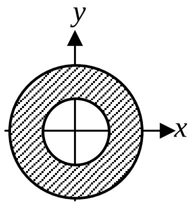
3) $1-x^2-y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2+y^2 \le 1$



4) $x^2+y^2>1$

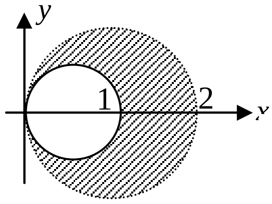


5) א. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+y^2 \le 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \le x^2+y^2 \le 4$

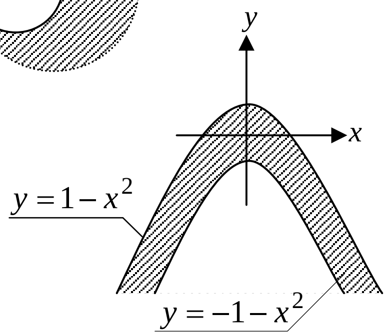


ב. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ אין פתרון

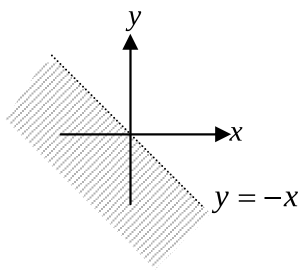
6) א. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2-x \ge 0 \\ 2x-x^2-y^2>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \le x^2+y^2 < 2x$



ב. $\left.\begin{matrix} x^2+y^2-x \le 0 \\ 2x-x^2-y^2<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ אין פתרון

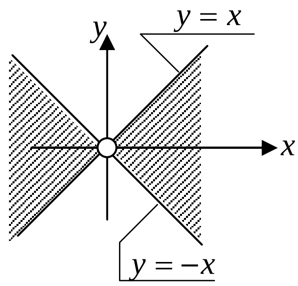


7) $-1 \le x^2+y \le 1$



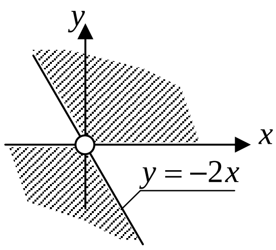
8) $x+y<0$

13) $\left|\frac{y}{x}\right| \le 1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} |y| \le |x| \\ x \ne 0 \end{matrix}\right.$



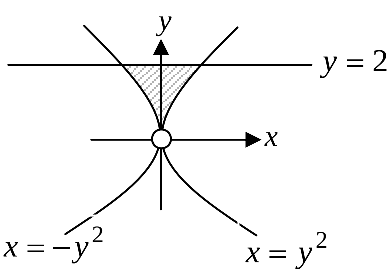
14) $-1 \le \frac{x}{x+y} \le 1 \Rightarrow$

א. $\left.\begin{matrix} x+y>0 \\ -x-y \le x \le x+y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y>0 \\ y \ge 0 \\ y \ge -2x \end{matrix}\right\}$



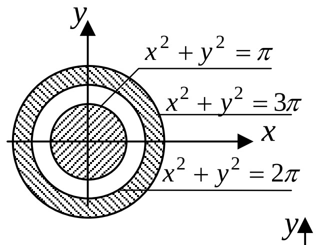
ב. $\left.\begin{matrix} x+y<0 \\ x \ge x+y \\ x \le -x-y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y<0 \\ y \le 0 \\ y \le -2x \end{matrix}\right\}$

15) $\left.\begin{matrix} -1 \le 1-y \le 1 \\ -1 \le \frac{x}{y^2} \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 \le y \le 2 \\ -y^2 \le x \le y^2 \\ y \ne 0 \end{matrix}\right\}$



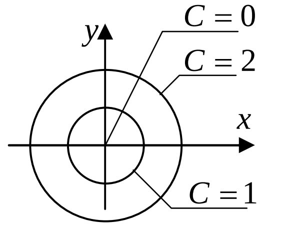
16) $\sin(x^2+y^2)\ge 0 \Rightarrow 2\pi k \le x^2+y^2 \le 2\pi k+\pi$

$k \in N \cup \{0\}$

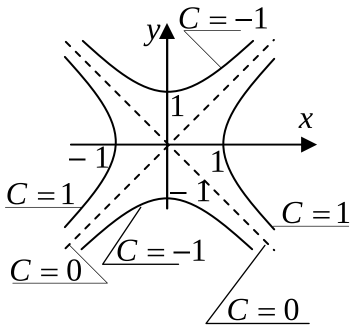


III.

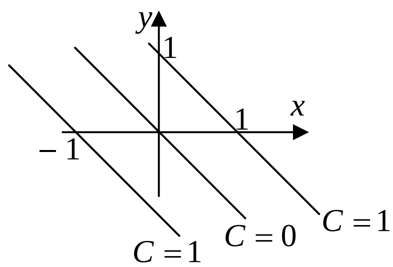
2) $x^2+y^2=C, \quad C\ge 0$



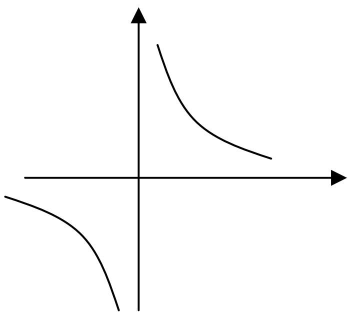
3) $x^2-y^2=C$



4) $(x+y)^2=C, \quad C\ge 0 \Rightarrow x+y=\pm\sqrt{C}$

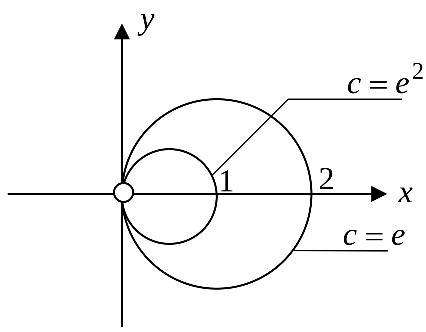


7) $xy=C, \quad C\ge 0$



8) $e^{2x/(x^2+y^2)}=C \Rightarrow \begin{cases} C=e^{C_1},\ C_1=2x/(x^2+y^2) \\ x^2+y^2\ne 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{2}{C_1}x \\ C_1=\ln C \\ C\ne 1, x^2+y^2\ne 0 \end{cases}$ או $\begin{cases} \mathrm{C}=1 \\ x=0 \\ y\ne 0 \end{cases}$



תרגול 6

ניגזרת חלקית מסדר גבוה

I חשב את הנגזרות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

1. $u = x^3 + 3xy^2 - 4x^2y^5 + 1$ 2. $p = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3. $u = xy + yz + zx$
4. $u = x^m y^n$ 5. $g = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 6. $z = e^{x^2 y}$
7. $u = 2x^3 y + x^2 z^3$ 8. $k = e^x \ln y + 3x + 2y - 5$

פונקציה סתומה

II

נניח שמשוואות הבאות מגדירות את הפונקציה סתומה $y(x)$. מצא את הניגזרות שלה :

1. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. $y'' = ?\,,\ y' = ?$
2. $y - 2\sin y = x$. $y'' = ?\,,\ y' = ?$
3. $xy^2 + x^5 = 2x$. $y' = ?$
4. $x^y = y^x$. $y' = ?$
5. בדוק שהמשוואה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ מגדירה פונקציה סתומה $z = f(x, y)$ בסביבת הנקודה $(0,0,a)$. מצא $z'_x\,,\ z'_y\,,\ z''_{xx}\,,\ z''_{yy}\,,\ z''_{xy}$.
6. נניח שמשוואה $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ מגדירה פונקציה סתומה $z = g(x, y)$.
הוכח שהפונקציה $z = g(x, y)$ מקיימת את המשוואה $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.
7. בדוק שהמשוואה $z^3 - xy + yz + y^3 = 2$ מגדירה פונקציה סתומה $z(x, y)$ בסביבת הנקודה $(1,1,1)$. חשב $z'_x(1,1)\,,\ z'_y(1,1)$.

דיפרנציאל

III חשב את הדיפרנציאל של הפונקציה

1. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$ 2. $u = x^2y + y^2z + x^2z$
3. $p = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ 4. $h = x^3y^2 + 1$
5. $u = z/(x^2 + y^2)$ 6. $g = x^2y^4 + xy^2 - 3x^2z + z^2y$

IV חשב בקרוב

1. $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ 2. $\sin 32^{\circ} \cdot \tan 40^{\circ}$
3. $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$ 4. $\arctan\frac{1.01}{0.98}$
5. $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$

שדה סקלרי. גרדיאנט . נגזרת מכוונת

V

1. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z = x^2 - xy + y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.
2. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u = xy^2z^3$ בנקודה $M(3,2,1)$ בכיוון $\vec{a} = (2,2,1)$.
3. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z = x^2 - y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית 60° עם הכיוון החיובי של ציר ה-X.
4. הוכח שהנגזרת המכוונת של $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ בנקודה $M(x, y, z)$ כלשהי בכיוון מ-M לראשית שווה ל- $(-2u/r)$, כאשר $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u = xe^{|\vec{r}\,|}$, $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ בנקודה $(0,1,0)$.

6. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ בנקודה $(1,1,1)$.
7. מצא נקודות שבהן הגרדיאנט של השדה הסקלרי $z=\sin(x+y)$ שווה ל- $\vec{i}+\vec{j}$.
8. מצא את הגרדיאנט של השדה הסקלרי $u=xyz$ וכיוון שלו בנקודה $M(2,1,1)$.
9. א. מצא את כיוון בו קצב ההישתנות של השדה הסקלרי $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ בנקודה $M(1,2,1)$ הוא מקסימלי
ב. מצא את הערך המקסימלי של הנגזרת המכוונת של u בנקודה $M(1,2,1)$.
10. חשב את הנגזרת של הפונקציה $z=x^2-xy+y^2$ בנקודה $M(1,1)$ בכיוון היוצר זווית α עם הציר ה-X. באיזה כיוון הנגזרת זו מקבלת א) ערך גדול ביותר ? ב) ערך קטן ביותר ? ג) הערך 0 ?
11. חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $u=xyz$ בנקודה $M(1,1,1)$ בכיוון $\vec{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. מהו גודל הגרדיאנט של הפונקציה בנקודה זו ?
12. מצא את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ בנקודה $M_0(-4,3)$ בכיוון הנורמל לקו הגובה העובר דרך M_0.
13. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=3x^2+5y^2+z^2$ העובר דרך הנקודה $M_0(1,-1,\ 2)$ ונגזרת מכוונת של הפונקציה $u(x,y,z)$ בנקודה M_0 בכיוון הנורמל למשטח רמה (α).
14. בדוק שהמשוואה $x+yz+z^3=6$ מגדירה פונקציה סתומה $z(x,y)$ בסביבת הנקודה $(3,2,1)$.
א חשב $z'_x(3,2)$, $z'_y(3,2)$.
ב חשב את הנגזרת המכוונת של הפונקציה $z(x,y)$ בנקודה $(3,2)$ בכיוון $\vec{n}=(0.6,-0.8)$.
ג מצא $z''_{yy}(x,y)$ וחשב $z''_{yy}(3,2)$.

משוואת מישור משיק ונורמל למשטח

VI

כתוב את משוואת המישור המשיק לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $x_0=1,\ y_0=2$ 2) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{2}$, $x_0=3,\ y_0=1$

כתוב את משוואת הנורמל לגרף של פונקציה $f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$

3) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$, $x_0=1,\ y_0=1$ 4) $f(x,y)=\dfrac{y+\ln x}{2}$, $x_0=1,\ y_0=1$

כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=0$ בנקודה M :

5) $x^2+y^2+z^2=169$, $M(3,4,12)$ 6) $2^{x/z}+2^{y/z}=8$, $M(2,2,1)$

7. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+2y^2+3z^2=21$ המקביל למישור $x+4y+6z=0$.
8. הוכח כי המשטחים הבאים

$$(S_1):\quad x^2+y^2+z^2=a\,x$$
$$(S_2):\quad x^2+y^2+z^2=b\,y$$
$$(S_3):\quad x^2+y^2+z^2=c\,z$$

כאשר $a,b,c\neq 0$ מאונכים זה לזה בכל נקודות חיתוך שלהם (הערה: שני משטחים מאונכים אם נורמלים שלהם מאונכים).

9. מצא משטח רמה (α) של השדה הסקלרי $u(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z}$ העובר דרך הנקודה $M_0(2,4,10)$. כתוב את משוואת המישור המשיק למשטח רמה (α) בנקודה M_0.

VII   תרגילים נוספים

1. לפונקציה $f(x,y,z)$ ידוע ש – $f'_x(1,1,2)=3$, $f'_y(1,1,2)=1$, $f'_z(1,1,2)=4$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $F(t)=f(\cos t,(t+1)^2,2e^t)$. חשב $F'(0)$.
2. לפונקציה $f(x,y)$ ידוע ש – $f'_x(3,1)=4$, $f'_y(3,1)=-1$. נגדיר פונקציה של משתנה אחד $H(z)=f\left(3z^2,2\sin\frac{\pi z}{6}\right)$. חשב $H'(1)$.
3. לפונקציה $g(x,y)$ ידוע ש – $g'_x(1,1)=2/3$.נגדיר פונקציה של משתנה אחד $G(v)=g\left(e^v,\cos v\right)$.
   א   חשב $G'(0)$.
   ב   ידוע גם ש– $g''_{xx}(1,1)=2/9$, $g'_y(1,1)=4/3$. חשב $G''(0)$.

תשובות

I.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x-8y^5$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x-80x^2y^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6y-40xy^4$

2. $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=1$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=m(m-1)x^{m-2}y^n$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=mnx^{m-1}y^{n-1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)x^my^{n-2}$

6 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2ye^{x^2y}(2x^2y+1)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xe^{x^2y}(1+x^2y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4e^{x^2y}$

7. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12xy+2z^3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6x^2z$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=6x^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=6xz^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0$

8. $\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}=e^x\ln y$, $\frac{\partial^2 k}{\partial x\partial y}=\frac{e^x}{y}$, $\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}=-\frac{e^x}{y^2}$

II.

1. $y'=-\frac{x+y}{x-y}$, $y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$ 2. $y'=\frac{1}{1-2\cos y}$, $y''=-\frac{2\sin y}{(1-2\cos y)^3}$

3. $y'=-\frac{y^2+5x^4-2}{2xy}$

4. $y'=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}=-\frac{y}{x}\frac{yx^y-xy^x\ln y}{yx^y\ln x-xy^x}=-\frac{y}{x}\frac{y-x\ln y}{y\ln x-x}=\frac{y^2}{x^2}\frac{1-\ln x}{1-\ln y}$

$x^y=y^x \;\Rightarrow\; y\ln x=x\ln y$, $(y\neq e\Rightarrow x\neq e)$

5. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-xy}{z^3}$

7. $z'_y(1,1)=-0.75$, $z'_x(1,1)=0.25$

III

1. $dz = (2xy^4 - 3x^2y^3 + 4x^3y^2)dx + (4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y)dy$

2. $du = (2xy + 2xz)dx + (x^2 + 2yz)dy + (x^2 + y^2)dz$ 3. $dp = \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

4. $dh = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy$ 5. $du = \dfrac{-2xzdx - 2yzdy}{(x^2 + y^2)^2} + \dfrac{dz}{x^2 + y^2}$

6. $dg = (2xy^4 + y^2 - 6xz)dx + (4x^2y^3 + 2xy + z^2)dy + (2zy - 3x^2)dz$

IV

1) 108.972 2) 0.443 $\{z = \sin x \tan y,\ dx = 2\pi/180,\ d\,y = -5\pi/180\}$

3) 2.95 4) $(\pi/4) + 0.015 = 0.800$ 5) 3.037

V

1) 1.4 2) $22\dfrac{2}{3}$ 3) $1 - \sqrt{3}$ 5) $e\,\bar{i}$ 6) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ 7) $y = -x + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8) $\operatorname{grad} u\big|_{(2,1,1)} = (1,2,2)$, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

9) $\operatorname{grad} u\big|_{(1,2,1)} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\max \dfrac{\partial u}{\partial l}(M) = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

10) $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$ א. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ב. $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ ג. $\alpha_1 = \dfrac{3\pi}{4},\ \alpha_2 = \dfrac{7\pi}{4}$

11) $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M) = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, $|\operatorname{grad} u|\big|_M = \sqrt{3}$ 12) 0.4

13) $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 12$, $grad\, u\,(1,-1,2) = (6,-10,4)$, $|\,grad\, u\,(1,-1,2)| = 2\sqrt{38}$

14) $z'_x(3,2) = -\dfrac{1}{5}$, $z'_y(3,2) = -\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{n}}(3,2) = \dfrac{1}{25}$, $z''_{yy} = 2yz/(y + 3z^2)^3$, $z''_{yy}(3,2) = \dfrac{4}{125}$

VI

1) $2x + 4y - z = 5$ 2) $3x - y - z = 4$ 3) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z - \frac{\pi}{4}}{2}$

4) $x - 1 = y - 1 = \dfrac{z - 0.5}{-2}$ 5) $3x + 4y + 12z = 169$ 6) $x + y - 4z = 0$

7) $x + 4y + 6z = 21,\ x + 4y + 6z = -21$

9) $2x + 4y - z = 10$

VII 1) $F'(0) = 10$ 2) $H'(1) = 24 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$ 3) $G'(0) = \dfrac{2}{3}$, $G''(0) = -\dfrac{4}{9}$

תרגול 7

נוסחת טיילור

I פתח לפי נוסחת טיילור סביב נק׳ M (עד סדר שני) את הפונקציות :

$$1)\ z(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5\ ,\ M(1,-2)$$

$$2)\ g(x,y)=x^y\ ,\ M(1,1) \qquad 3)\ p(x,y)=\ln\frac{x}{y}\ ,\ M(1,1)$$

II פתח לפי נוסחת מקלורן (עד סדר שני) את הפונקציות :

$$1)\ f=\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad 2)\ g=\frac{\cos x}{\cos y} \qquad 3)\ z=\frac{1}{1-x+2y} \qquad 4)\ p=\ln(1+x+y)$$

$$5)\ v=e^x\cos y \qquad 6)\ u=e^x\sin y \qquad 7)\ q=\sin(x^2+y^2) \qquad 8)\ z=(1+x)^m(1+y)^n$$

אקסטרמום לוקלי (מקומי) של פונקציות של מספר משתנים

III חשב את נקודות הקיצון עבור הפונקציות הבאות :

$$1)\ z=x^2+(y-1)^2 \qquad 2)\ z=x^2-(y-1)^2 \qquad 3)\ z=x^2-xy+y^2-2x+y$$

$$4)\ z=x^3+y^3-3xy \qquad 5)\ z=2x^4+y^4-x^2-2y^2 \qquad 6)\ z=1-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$7)\ z=e^{x/2}(x+y^2) \qquad 8)\ z=-x^2-xy-y^2+4\ln x+10\ln y$$

אקסטרמום מוחלט

IV חשב את הערך המקסימלי והערך המינימלי עבור הפונקציות הבאות בתחום D :

$$1)\ z=x-2y-3\ ,\ D=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1\}$$

$$2)\ p=x^2-y^2-4x\ ,\ D=\{(x,y):x^2+y^2\le 9\}$$

$$3)\ f=x^2-xy+y^2\ ,\ D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$$

$$4)\ q=2x^3+4x^2+y^2-2xy\ ,\ D=\{(x,y):y\ge x^2, y\le 4\}$$

תשובות

I

$$1)\ z(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$$

$$2)\ g_2(x,y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$

$$3)\ p_2(x,y)=(x-1)-(y-1)+0.5[-(x-1)^2+(y-1)^2]$$

II

$$1)\ f_2(x,y)=1-\frac{x^2+y^2}{2}, \qquad 2)\ g_2(x,y)=1-\frac{x^2-y^2}{2}$$

$$3)\ z_2(x,y)=1+(x-2y)+(x-2y)^2\ , \qquad 4)\ p_2(x,y)=(x+y)-\frac{(x+y)^2}{2}$$

$$5)\ v_2(x,y)=1+x+\frac{x^2-y^2}{2},\quad 6)\ u_2(x,y)=y+xy,\quad 7)\ q_2(x,y)=x^2+y^2$$

$$8)\ z_2(x,y)=1+mx+ny+\frac{m(m-1)}{2}x^2+mnxy+\frac{n(n-1)}{2}y^2$$

III.

1) $z_{\min}(0,1)=0$ 2) $(0,1)$ נקודת אוכף , אין נקודות קיצון

3) $z_{\min}(1,0)=-1$ 4) $z_{\min}(1,1)=-1$, $(0,0)$ נקודת אוכף

5) $z_{\max}(0,0)=0$, $z_{\min}(\pm 0.5,\pm 1)=-1.125$

$(\pm 0.5,0)$, $(0,\pm 1)$ נקודות אוכף

6) $z_{\max}(0,0)=1$ 7) $z_{\min}(-2,0)=-\dfrac{2}{e}$ 8) $z_{\max}(1,2)=-7+10\ln 2$

IV.

1) $\min\limits_D z=-5$, $\max\limits_D z=-2$ 2) $\min\limits_D p=-11$, $\max\limits_D p=21$

3) $\min\limits_D f=0$, $\max\limits_D f=1$ 4) $\min\limits_D q=0$, $\max\limits_D q=32$

פתרונות

I. 2) $f(x,y)=x^y$, $M(1,1)$, $f_2(x,y)=f(1,1)+f'_x(1,1)(x-1)+f'_y(1,1)(y-1)+$

$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f''_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f''_{yy}(1,1)(y-1)^2\right]$$

$f'_x=yx^{y-1}$, $f'_y=x^y\ln x$, $f''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$, $f''_{yy}=x^y\ln^2 x$

$f(1,1)=1$, $f'_x(1,1)=1$, $f'_y(1,1)=0$, $f''_{xx}(1,1)=0$, $f''_{xy}(1,1)=1$, $f''_{yy}(1,1)=0$

$$f_2(x,y)=1+1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+\frac{1}{2}[0\cdot(x-1)^2+2\cdot 1\cdot(x-1)(y-1)+0\cdot(y-1)^2]$$

$$f_2(x,y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)$$

IV.

1) $z=x-2y-3$, $D=\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1\}$

א. $\begin{cases} z'_x=1\ne 0\\ z'_y=-2\ne 0\end{cases}\Rightarrow$ אין נקודות קריטיות הנמצאות בתוך התחום D

ב. ספה: (OA) $\begin{cases} y=0\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z=x-3\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=1\ne 0\Rightarrow$ אין נקודות הקריטיות בתוך התחום (OA)

(OB) $\begin{cases} x=0\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z=-2y-3\\ 0\le y\le 1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{dz}{dy}=-2\ne 0\Rightarrow$ אין נקודות הקריטיות בתוך התחום (OB)

(AB) $\begin{cases} y=1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z=3x-5\\ 0\le x\le 1\end{cases}\Rightarrow\dfrac{dz}{dx}=3\ne 0\Rightarrow$ אין נקודות הקריטיות בתוך התחום (AB)

ג. נקודות חשודות O,B,A : $z(O)=z(0,0)=-3$, $z(B)=z(0,1)=\underline{-5}$, $z(A)=z(1,0)=\underline{-2}$

תרגול 8
אינטגרל כפול

1. חשב את האינטגרלים :

א) $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy$ ב) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy$ ג) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \sin^2\theta \, dr$

2. חשב את האינטגרל $\int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy$ כאשר $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$

3. באינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה :

א. כאשר D משולש בעל הקודקודים $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$

ב. כאשר D משולש בעל הקודקודים $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(-2,1)$

ג. כאשר D טרפז בעל הקודקודים $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$

ד. כאשר D עיגול $x^2+y^2 \le 1$

ה. כאשר D עיגול $x^2+y^2 \le y$

ו. כאשר $D = \left\{(x,y) \mid y \le 1, y \ge x^2\right\}$

ז. כאשר D טבעת $1 \le x^2+y^2 \le 4$

ח. כאשר D הוא התחום החסום על ידי הקווים $x=-0.5$, $x=-2$, $y=-x$, $xy=-1$

ט. כאשר $D = \left\{(x,y) \mid x+y \le 2, y \le x^2, 0 \le x \le 2, y \ge -2\right\}$

י. כאשר D הוא תחום משותף של העיגול $(x-2)^2+(y-3)^2 \le 1$ והמשולש בעל הקודקודים $O(0,0)$, $A(0,4)$, $B(4,0)$

כ. כאשר D הוא תחום משותף של העיגול $(x-1)^2+(y-1)^2 \le 2$ והמשולש בעל הקודקודים $O(0,0)$, $A(0,2+\sqrt{2})$, $B(2+\sqrt{2},0)$

ל. כאשר D הוא תחום משותף של העיגול $x^2+y^2 \le 10$ והמשולש בעל הקודקודים $A(-3,4)$, $B(-3,-4)$, $C(5,0)$

4. החלף סדר האינטגרציה באינטגרלים הכפולים :

א) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$ ב) $\int_{-6}^2 dx \int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x,y)dy$ ג) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$ ד) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$

ה) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$ ו) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$ ז) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$

5. חשב את האינטגרלים הבאים :

א. $\iint_D xy^2\,dx\,dy$ כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$

ב. $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$ כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של המעגל בעל הרדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

ג. $\iint_D |xy|\,dx\,dy$ כאשר D עיגול בעל הרדיוס a $(a>0)$ שמרכזו בראשית .

ד. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$, $(a>0)$.

6. באינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ עבור לקואורדינאטות קוטביות והצב את הגבולות האינטגרציה :

א. כאשר D עיגול $x^2+y^2\le a^2$, $(a>0)$

ב. כאשר D עיגול $x^2+y^2\le ax$, $(a>0)$

ג. כאשר D טבעת $a^2\le x^2+y^2\le b^2$, $(0<a<b)$

ד. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$

ה. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,(x^2/a)\le y\le a,\ -a\le x\le a\}$, $(a>0)$

ו. כאשר $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,\ x\le y\le \sqrt{3}\,x\}$

7. חשב ע"י מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$a)\ \iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad b)\ \iint_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

8. חשב את האינטגרלים הבאים :

$$a)\ \iint_{|x|+|y|\le 1}(|x|+|y|)\,dx\,dy \qquad b)\ \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

$c)\ \iint_D xy\,dx\,dy$ כאשר D חסום ע"י $x+y=2.5,\ xy=1$

9. צייר את הגופים שנפחיהם שווים לאינטגרלים הבאים בהתאמה :

$$9.1)\ \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\ dy \qquad 9.2)\ \iint_{\substack{0\le x+y\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}}(x+y)\,dx\,dy \qquad 9.3)\ \iint_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$$

$$9.4)\ \iint_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad 9.5)\ \iint_{x^2+y^2\le x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

10. חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים הבאים :

א) $x+y=2,\ x^2-4y=4$ ב) $xy=a^2,\ x+y=\frac{5}{2}a,\ (a>0)$ ג) $x^2+y^2=2x,\ y=0,\ y=x\sqrt{3}$

ד) $x+y=3,\ y^2=4x$ ה) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=x,\ y=x\sqrt{3},\ (x\ge 0)$

ו) $x^2+4y^2=16$ ז) $y^2=2x+1,\ y^2=-8x+16$

11. חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

11.1) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

11.2) $x+y+z=3,\ z=0,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$

11.3) $z=0,\ z=x^2+y^2,\ y=1,\ y=x^2$

12. חשב את המסה של ממברנה $D=\{(x,y)\,|\,y\le 1,\ y\ge x^2\}$ אם צפיפות הממברנה $f(x,y)=y$

תשובות

1. א) 1 ב) $1/40$ ג) $\pi a^3/3$ 2. $F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$

3.

א) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)dx$ ב) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^1 f(x,y)dy+\int\limits_{-2}^0 dx\int\limits_{-x/2}^1 f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

ג) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x+1} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y-1}^1 f(x,y)dx$

ד) $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

ה) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} dx\int\limits_{0.5-\sqrt{0.25-x^2}}^{0.5+\sqrt{0.25-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$ ו) $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

ז) $\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

ח) $\int\limits_{-2}^{-1} dx\int\limits_{-1/x}^{-x} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{-0.5} dx\int\limits_{-x}^{-1/x} f(x,y)dy=$

$=\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-2}^{-y} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-1/y}^{-0.5} f(x,y)dx+\int\limits_{0.5}^1 dy\int\limits_{-2}^{-1/y} f(x,y)dx+\int\limits_{0.5}^1 dy\int\limits_{-y}^{-0.5} f(x,y)dx$

ט) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-2}^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-2}^{2-x} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx+\int\limits_{-2}^0 dy\int\limits_0^2 f(x,y)dx$

י) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{3-\sqrt{4x-x^2-3}}^{4-x} f(x,y)dy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{2-\sqrt{6y-y^2-8}}^{4-y} f(x,y)dx$

כ) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1+\sqrt{1+2x-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2+\sqrt{2}-x} f(x,y)dy+\int\limits_2^{1+\sqrt{2}} dx\int\limits_{1-\sqrt{1+2x-x^2}}^{2+\sqrt{2}-x} f(x,y)dy$

ל) $\int\limits_{-3}^{-1} dx\int\limits_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^3 dx\int\limits_{(x-5)/2}^{(5-x)/2} f(x,y)dy+\int\limits_3^{\sqrt{10}} dx\int\limits_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} f(x,y)dy$

4.

א) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y/2}^y f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{y/2}^2 f(x,y)dx$ ב) $\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx+\int\limits_0^8 dy\int\limits_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

ג) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$ ד) $\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$ ה) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

ו) $\int\limits_a^{2a} dy\int\limits_{y^2/(2a)}^{2a} f(x,y)dx+\int\limits_0^a dy\int\limits_{y^2/(2a)}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_0^a dy\int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx$ ז) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

5. א) $32/21$ ב) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$ ג) $\frac{a^4}{2}$ ד) $14a^4$

6.

א) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ ב) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

ג) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$ ד) $\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/(\cos\theta+\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

ה) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

ו) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_{1/\cos\theta}^{2/\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr$

7. a) $2\pi a^3/3$ b) $-6\pi^2$

8. a) $4/3$ b) $2\pi ab/3$ c) $1\frac{37}{128}-\ln 2$

10. א) $64/3$ ב) $a^2\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)$ ג) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ד) $64/3$ ה) $\pi/8$ ו) 8π ז) $20/3$

11.1. $5/6$ 11.2. $\frac{3\pi}{4}-\frac{2}{3}$ 11.3. $88/105$ 12. $m=0.8$

פתרונות

1. א) $\int_0^1 dx \int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1 (xy+y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (x+1/2)dx = \dots$

ב) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 dy = \int_0^1 \frac{xy^3}{3}\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^4-x^7)\, dx = \dots$

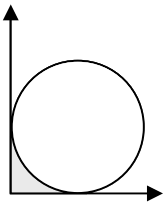
ג) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 \sin^2\theta\, dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \dots$

2. $\int_a^A dx \int_b^B f(x,y)dy = \int_a^A dx \int_b^B \left(F'_x\right)'_y dy = \int_a^A \left(F'_x\Big|_{y=b}^{y=B}\right)dx = \int_a^A \left(F'_x(x,B)-F'_x(x,b)\right)dx = \dots$

5. א) $\iint_D xy^2\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{y^2/4}^{1} xy^2 dx$

ב) $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}} = \int_0^2 dx \int_0^{2-\sqrt{4x-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{4-x}} =$

$= \int_0^2 \frac{2-\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{4-x}} dx = \int_0^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{4-x}} - \int_0^2 \sqrt{x}dx$

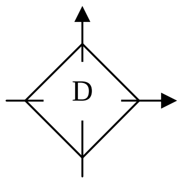


ג) $\iint_D |\,x\,y\,|\,dx\,dy = 4\int_0^a xdx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} ydy$

ד) $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx$

7. א) $\iint_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,r\,dr$

ב) $\iint_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi}^{2\pi} r\sin r\,dr$



8. a) $\iint_{|x|+|y|\le 1} (\,|\,x\,|+|\,y\,|\,)\,dx\,dy = 4 \iint_{\substack{x+y\le 1\\ x\ge 0,\, y\ge 0}} (\,x+y\,)\,dx\,dy = 4\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (\,x+y\,)dy$

b) $\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,a\,b\,r\,dr$

$x = a\,r\cos\theta,\ y = b\,r\sin\theta$

10. א) $S = \int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} dy$ ב) $S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{2.5a-x} dy$

ג) $S = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r\,dr$ ד) $S = \int_{-6}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx$

11.1. $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1+x+y)dy$

11.2. $V = \iint_D (3-x-y)dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (3-r\cos\theta - r\sin\theta)\,r\,dr$

11.3. $V = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)dy$ 12. $m = \iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} y\,dy$

אינטגרל משולש

I. חשב את האינטגרלים המשולשים :

1. $\iiint_T (2x-y+3z)\,dx\,dy\,dz$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$

2. $\iiint_T z^2 e^{x+y}\,dx\,dy\,dz$

כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$

3. $\iiint_T y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\pi/2$

4. $\iiint_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $z=xy, z=0, y=x, x=1$

5. $\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x+y+z=1, z=0, x=0, y=0$

II. חשב את נפח הגופים חסומים ע"י המשטחים הנתונים :

1. $z=x^2+y^2, z=2x^2+2y^2, y=x, y=x^2$

2. $y=x^2, y=1, x+y+z=3, z=0$

III.

1. חשב את המסה של גוף T החסום ע"י המשטחים $x=0, y=0, z=0, x=2, y=3, z=1$
אם צפיפות $f(x,y,z)=x+y+z$

2. חשב את המסה של גוף T החסום ע"י המשטחים $x^2=2y, y+z=1, 2y+z=2$
אם צפיפות $f(x,y,z)=y$

קואורדינטות גליליות וכדוריות

מערכת קואורדינטות גליליות (r,θ,z) : $z=z,\ y=r\sin\theta,\ x=r\cos\theta$

מערכת קואורדינטות כדוריות (ρ,θ,φ) : $z=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ x=\rho\cos\theta\sin\varphi$

IV. רשום את קואורדינטות גליליות , כדוריות וקרטזיות של נקודות :

	(x,y,z)	(r,θ,z)	(ρ,θ,φ)
1	$(0,1,0)$		
2		$(1,0,0)$	
3		$(1,\pi/2,1)$	
4			$(2\sqrt{2},-\pi/2,\pi/2)$
5	$(-1,0,-1)$		

V. ב R^3 תאר את האוסף הנקודות המקיימות את המשוואות הבאות , כלומר קבע איזו צורה גיאומטרית מייצגת המשוואה. הסבר.

1. $r=2$ 2. $\varphi=\pi/4$ 3. $\rho=3$ 4. $\theta=0$ 5. $\varphi=\pi$ 6. $z=r$ 7. $z=r^2$

8. $\begin{cases} r=2 \\ z=3 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} \rho=5 \\ z=5 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \varphi=\pi/3 \\ \theta=\pi/2 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \rho=5 \\ \varphi=0.8\pi \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \rho=2 \\ \theta=\pi \end{cases}$

VI. ב R^3 תאר את האוסף הנקודות המקיימות את המשוואות הבאות ותציג את האוסף של הנקודות בשתי מערכות הקואורדינטות האחרות (גליליות , כדוריות וקרטזיות)

1. $r=2\cos\theta$ 2. $\rho=2\cos\varphi$ 3. $z=0$ 4. $r=4$ 5. $\rho\cos\theta\sin\varphi=3$

6. $2x+3y+5z=11$ 7. $z=r^2$ 8. $\varphi=\pi/4$ 9. $x^2+y^2+z^2=4y$

10. $4r^2+9z^2=36$ 11. $z=10$ 12. $x^2+y^2-4z^2=1$ 13. $x^2+y^2-4z^2=-1$

החלפת משתנים באינטגרל משולש

VII. חשב את האנטגרלים המשולשים :

1. $\iiint_T x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $x^2+y^2+z^2=1, z=0, x=0, y=0$ $\quad (x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$

2. $\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטחים $z^2=x^2+y^2, z=1$

3. $\iiint_T x^2\,dx\,dy\,dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטח $x^2+y^2+z^2=9$

4. $\iiint_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$ כאשר $T=\{x^2+y^2\le 2x, y\ge 0, z\ge 0, z\le 3\}$

5. $\iiint_T \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$ כאשר התחום T חסום ע"י המשטח $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

6. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$

VIII. חשב את נפח הגופים חסומים ע"י המשטחים הנתונים :

1. $z=x^2+y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$
2. $z=6-x^2-y^2, z=\sqrt{x^2+y^2}$
3. $3z=x^2+y^2, z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
4. $2z=x^2+y^2, z=\sqrt{3-x^2-y^2}$
5. $2z=x^2+y^2+z^2$

IX. חשב את המסה של גוף T החסום ע"י המשטחים $x^2+y^2=4, z=0, z=3$ אם צפיפות $f(x,y,z)=x^2+y^2$

תשובות

I. 1) 27 2) $\frac{1}{3}(e-1)^2$ 3) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{364}$ 5) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$

II. 1) $V=\frac{3}{35}$ 2) $V=\frac{16}{5}$ III. 1) $m=18$ 2) $m=\frac{8\sqrt{2}}{35}$

IV.

	(x,y,z)	(r,θ,z)	(ρ,θ,φ)
1	$(0,1,0)$	$(1,\pi/2,0)$	$(1,\pi/2,\pi/2)$
2	$(1,0,0)$	$(1,0,0)$	$(1,0,\pi/2)$
3	$(0,1,1)$	$(1,\pi/2,1)$	$(\sqrt{2},\pi/2,\pi/4)$
4	$(0,-2\sqrt{2},0)$	$(2\sqrt{2},-\pi/2,0)$	$(2\sqrt{2},-\pi/2,\pi/2)$
5	$(-1,0,-1)$	$(1,\pi,-1)$	$(\sqrt{2},\pi,3\pi/4)$

V. 1) גליל 2) חצי חרוט 3) כדור 4) חצי מישור 5) קרן 6) חצי חרוט 7) פרבולויד 8) מעגל
9) נקודה 10) קרן 11) מעגל 12) חצי מעגל

VI.

	(x,y,z)	(r,θ,z)	(ρ,θ,φ)
1	$x^2+y^2=2x$	$r=2\cos\theta$	$\rho=2\cos\theta/\sin\varphi$
2	$x^2+y^2+z^2=2z$	$r=\sqrt{2z-z^2}$	$\rho=2\cos\varphi$
3	$z=0$	$z=0$	$\varphi=\pi/2$
4	$x^2+y^2=16$	$r=4$	$\rho\sin\varphi=4$
5	$x=3$	$r\cos\theta=3$	$\rho\cos\theta\sin\varphi=3$
6	$2x+3y+5z=11$	$z=\dfrac{11-r(2\cos\theta+3\sin\theta)}{5}$	$\rho=\dfrac{11}{(2\cos\theta+3\sin\theta)\sin\varphi+5\cos\varphi}$
7	$z=x^2+y^2$	$r=\sqrt{z}$	$\rho=\cos\varphi/\sin^2\varphi$
8	$z=\sqrt{x^2+y^2}$	$z=r$	$\varphi=\pi/4$
9	$x^2+y^2+z^2=4y$	$z^2=4r\sin\theta-r^2$	$\rho=4\sin\theta\sin\varphi$
10	$\dfrac{x^2+y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$	$r=\dfrac{\sqrt{36-9z^2}}{2}$	$\rho=\dfrac{6}{\sqrt{1+5\cos^2\varphi}}$
11	$z=10$	$z=10$	$\rho=10/\cos\varphi$
12	$x^2+y^2-4z^2=1$	$r=\sqrt{1+4z^2}$	$\rho=1/\sqrt{1-5\cos^2\varphi}$
13	$x^2+y^2-4z^2=-1$	$r=\sqrt{4z^2-1}$	$\rho=1/\sqrt{5\cos^2\varphi-1}$

VII. $1)\dfrac{1}{48}\qquad 2)\dfrac{\pi}{6}\qquad 3)\dfrac{324\pi}{5}\qquad 4)8\qquad 5)\dfrac{4abc\pi}{5}\qquad 6)\dfrac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{15}$

VIII. $1)V=\dfrac{\pi}{6}\qquad 2)V=\dfrac{32}{3}\pi\qquad 3)V=\dfrac{19}{6}\pi\qquad 4)V=\dfrac{\pi}{3}(6\sqrt{3}-5)$

IX. $m=24\pi$

פתרונות

I. $$4)\iiint_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_0^{xy}x\,y^2z^3\,dz=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^x x^5\,y^6\,dy$$

$$5)\iiint_T \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}=\iint_D dx\,dy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dy$$

II. $$1)V=\iiint_T dx\,dy\,dz=\iint_D dx\,dy\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}dz=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\,dy$$

$$2)V=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}dy\int_0^{3-x-y}dz$$

III. $$1)\,m=\iiint_T (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

VII. $$1)\iiint_T x\,y\,z\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1(\rho\sin\varphi\cos\theta)(\rho\sin\varphi\sin\theta)(\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho$$

$$2)\iiint_T\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\,dr\int_r^1 r\,dz$$

תרגול 10
אנטגרל קווי

I. חשב את האינטגרלים הקוויים מהסוג הראשון:

1. $\int_C (x+y)\,dl$, C – משולש בעל הקדקודים $B(0,1)\,,A(1,0)\,,O(0,0)$

2. $\int_C y^2\,dl$, C – קשת הציקלואידה $y=a(1-\cos t)\,,x=a(t-\sin t)$, $a>0,(0\le t\le 2\pi)$.

3. $\int_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, C - קטע קו ישר OA , $A(1,2)\,,O(0,0)$

4. $\int_C (x+y)\,dl$ כאשר $C=\{(x,y):\,|x|+|y|=1\}$

5. $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,dl$ כאשר C : $\vec r(t)=2\cos t\,\vec i+2\sin t\,\vec j+t\,\vec k$, $0\le t\le 2\pi$ (קו הבורג)

6. $\int_C (2z-\sqrt{x^2+y^2})\,dl$ כאשר C : $\vec r(t)=t\cos t\,\vec i+t\sin t\,\vec j+t\,\vec k$, $0\le t\le 2\pi$

II. חשב את האנטגרלים הקוויים מהסוג השני:

1. $\int_{OA} -ydx+xdy$, $A(1,2)\,,O(0,0)$ כאשר: א) המסילה OA היא קטע קו ישר

ב) המסילה OA היא קטע פרבולה $y=2x^2$

ג) המסילה OA היא קו שבור OBA , $B(1,0)$

2. $\int_{AB} -ydx+xdy$, $A(-2,0)\,,B(2,0)$ כאשר $AB:$ $y=\sqrt{4-x^2}$

3. $\int_{AB} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$,כאשר $AB:$ $y=1-|1-x|$, $(x_A=0,x_B=2,0\le x\le 2)$

4. $\int_{AB} (x^2+1)\,dx+(2x+y)\,dy+(x+y-z)\,dz$ לאורך הישר מנקודה $A(1,-1,0)$ לנקודה $B(3,-2,3)$

5. $\int_C xy^2dx+yz^2dy-x^2z\,dz$, C - ישר מנקודה $O(0,0,0)$ לנקודה $B(-2,4,5)$

6. $\int_C (y^2-z^2)dx+2yz\,dy-x^2\,dz$, C – העקומה $x=t\,,y=t^2\,,z=t^3$, $(0\le t\le 1)$,

כיוון חיובי – כיוון עלית הפרמטר.

7. $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, C העקומה $x=a\cos t\,,y=a\sin t\,,z=bt$, $b>0,a>0,(0\le t\le 2\pi)$

כיוון חיובי – כיוון עלית הפרמטר.

III. חשב את אורכי הקווים הבאים (כל הפרמטרים חיוביים)

1. $C:$ $x^2+y^2=R^2$

2. $C:$ $x=2a\cos t-a\cos 2t\,,y=2a\sin t-a\sin 2t$, $(0\le t\le 2\pi)$ - קרדיאואידה

3. $C:$ $x=3t\,,y=3t^2\,,z=2t^3$ מהנקודה $O(0,0,0)$ עד לנקודה $B(3,3,2)$

4. $C:$ $x=a\cos t\,,y=a\sin t\,,z=bt$, $(0\le t\le 2\pi)$

5. $C:$ $x=\sqrt t\cos t\,,y=\sqrt t\sin t\,,z=t$, $(1\le t\le 4)$

IV .

1. מצא את המסה של קשת קו הבורג $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 3t$, $(0 \le t \le 2\pi)$ אם הצפיפות בכל נקודה שווה לריבוע המרחק של הנקודה מהראשית.
2. מצא את המסה של העקום $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t$, $(0 \le t \le 1)$ אם הצפיפות היא קבוע ושווה ל- $\sqrt{3}$.
3. מצא את המסה של העקום $y = x^2 + 1$, $(0 \le x \le 1)$ אם הצפיפות היא שווה $f(x,y) = x$
4. מצא את המסה של הפרבולה $y^2 = 4x$, $(0 \le x \le 1)$ אם הצפיפות היא שווה $f(x,y) = |y|$

V . מצא את עבודה של הכוח המשתנה $\vec{F}$ הפועל לאורך העקומה C מנקודה D לנקודה B

1. $\vec{F} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, z^2 \right)$; $C: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t$; $D(2,0,0), B(2,0,6\pi)$;
2. $\vec{F} = (x+y, -x)$; $C: x = a\cos t, y = a\sin t$; $(0 \le t \le 2\pi)$ בכיוון החיובי
3. $\vec{F} = (4x^6, xy)$; $C: y = x^3$; $D(0,0), B(1,1)$;
4. $\vec{F} = (y - z, xz, x^2)$; $D(0,2,-1), B(2,1,0)$; C - קטע קו ישר DB

VI . חשב את האינטגרלים הבאים לאחר שתוכיח כי הביטוי בתוך האינטגרל הוא דיפרנציאל שלם :

1. $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx$
2. $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy$
3. $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy$
4. $\displaystyle\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$
5. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$
6. $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + zxdy + xydz$
7. $\displaystyle\int_{(A)}^{(B)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, נקודה A נמצאת על כדור $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,
נקודה B נמצאת על כדור $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(a > b > 0)$
ומסלול האינטגרציה אינו עובר דרך ראשית הצירים.

VII . חשב בעזרת <u>נוסחת גרין</u>

1. $\displaystyle\oint_{OmAnO} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ OmA - קטע הפרבולה $y = x^2$,
AnO - קטע הפרבולה $x = y^2$
2. $\displaystyle\oint_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$ C היא שפת המשולש ABD בכיוון החיובי
$D(2,5), B(3,2), A(1,1)$
3. $\displaystyle\oint_C xy^2dy - x^2y\,dx$ C – המעגל $x^2 + y^2 = a^2$ בכיוון החיובי
4. $\displaystyle\oint_C (x+y)dx - (x-y)\,dy$ C – האליפסה $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ בכיוון החיובי
5. תוך שימוש בנוסחת גרין מצא הערך של האינטגרל $I = \displaystyle\oint_C \left(\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx + \frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\,dy \right)$
כאשר (C) היא עקומה סגורה המורכבת מקשתות של שני מעגלים $(y > 0)$, $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$
וקטעים של הישרים $(y > 0)$, $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$ ביניהם.

VIII . חשב את הפוטנציאל z , כאשר

1. $dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$

2. $dz=(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$

3. $dz=(e^{xy}+5)(xdy+ydx)$ 4. $dz=(1-\sin 2x)dy-(3+2y\cos 2x)dx$

5. $du=\dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$ 6. $d\,u=\dfrac{dx}{z}-\dfrac{3dy}{z}+\dfrac{3y-x+z^3}{z^2}d\,z$

IX. חשב את השטח של התחום החסום ע"י העקומים הבאים :

1. האליפסה $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 2. $x=y^2\,,\,x=1$

3. הציקלוידה $x=a\,(t-\sin t)\,,\,y=a\,(1-\cos t)$, $a>0,\,(0\le t\le 2\pi)$ וציר x

X. הוכח ש- $\vec F$ הוא שדה משמר ומצא את פוטנציאל שלו

1. $\vec F=e^{x-y}(1+x+y)\,\vec i+e^{x-y}(1-x-y)\,\vec j$, בכל המישור

2. $\vec F=\dfrac{x}{1+x^2+y^2}\,\vec i+\dfrac{y}{1+x^2+y^2}\,\vec j$, בכל המישור

3. $\vec F=\dfrac{-y^2}{(x-y)^2}\,\vec i+\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\,\vec j$, בתחום $\overline{D}:(x+5)^2+y^2\le 9$

4. $\vec F=2\sin(y^2+4)\,\vec i+(4xy\cos(y^2+4)+6e^{3y})\,\vec j+6z\,\vec k$ בכל המרחב

5. $\vec F=|\vec r\,|\,\vec r$, $\vec r=x\,\vec i+y\,\vec j+z\,\vec k$ בכל המרחב

XI. חשב $\oint_\Gamma \vec F\cdot d\,\vec r$ (צירקולציה של $\vec F$) כאשר

1. $\vec F=(x+3y+2z)\,\vec i+(2x+z)\,\vec j+(x-y)\,\vec k$, Γ הוא קו שבור $ACBA$
$A(2,0,0),B(0,3,0),C(0,0,1)$

2. $\vec F=y\,\vec i-x\,\vec j$, $\Gamma: x=a\cos t, y=a\sin t$ מעגל בכיוון חיובי.

3. $\vec F=(2y+5z)\vec i+(2x-3z)\,\vec j+(5x-3y)\,\vec k$, $\Gamma:\left\{x^2+y^2+z^2=4\,,\,z=\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

4. $\vec F=\left(e^{2y}+\dfrac{2}{2x+15}\right)\vec i+(2x\,e^{2y}+\cos 7y-7y\sin 7y)\,\vec j$, Γ הוא קו שבור
$ODCBAO$ $O(0,0),A(1,2),B(-1,3),C(-2,-1),D(5,-6)$

5. $\vec F=\dfrac{-y\vec i+x\vec j}{x^2+y^2}$, Γ הוא מעגל בכיוון חיובי :

$a)\ x^2+y^2=1$ $b)\,(x-2)^2+y^2=1$

<u>תשובות</u>

I $1)\,1+\sqrt2$ $2)\,\dfrac{256}{15}a^3$ $3)\ln\dfrac{\sqrt5+3}{2}$ $4)\,0$ $5)\,\dfrac{8\pi\sqrt5}{3}(3+\pi^2)$ $6)\,\dfrac{2\sqrt2}{3}\left[(1+2\pi^2)^{3/2}-1\right]$

II 1.א) 0 1.ב) $\dfrac{2}{3}$ 1.ג) 2 $2)-4\pi$ $3)\,\dfrac{4}{3}$ $4)\,\dfrac{31}{6}$ $5)\,91$ $6)\,\dfrac{1}{35}$ $7)-\pi\,a^2$

III $1)\,2\pi R$ $2)\,16a$ $3)\,5$ $4)\,2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ $5)\,\dfrac{17}{3}$

IV 1) $40\pi(4+3\pi^2)$ 2) $3(e-1)$ 3) $\frac{5^{3/2}-1}{12}$ 4) $\frac{8}{3}(\sqrt{8}-1)$

V 1) $72\pi^3+2\pi$ 2) $-2\pi a^2$ 3) 1 4) $17/3$

VI. 1) 8 2) 12 3) 4 4) -2 5) $-53\frac{7}{12}$ 6) 0 7) $b-a$

VII 1) $\frac{1}{30}$ 2) $-46\frac{2}{3}$ 3) $\frac{\pi a^4}{2}$ 4) $-2ab\pi$ 5) $\frac{\pi}{12}\ln 2$

VIII 1) $z=\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}+x^2y-xy^2+C$ 2) $z=x^2+x+2y-3xy^2+C$

3) $z=e^{xy}+5xy+C$ 4) $z=y-3x-y\sin 2x+C$

5) $u=C+\ln|x+y+z|$ 6) $u=\frac{x-3y}{z}+\frac{z^2}{2}+C$

IX 1) πab 2) $4/3$ 3) $3\pi a^2$

X. 1) $u=e^{x-y}(x+y)+C$ 2) $u=0.5\ln(1+x^2+y^2)+C$ 3) $u=\frac{xy}{x-y}+C$

4) $u=2x\sin(y^2+4)+2e^{3y}+3z^2+C$ 5) $\frac{1}{3}|\vec{r}|^3+C$

XI. 1) -5 2) $-2\pi a^2$ 3) 0 4) 0 5a) 2π 5b) 0

פתרונות

I

2) $dl=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\ dt=a\sqrt{2-2\cos t}\ dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$,

$$\left(1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha\right)$$

$$\int_C y^2\,dl=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=a^3\int_0^{2\pi}4\sin^4\frac{t}{2}\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-2\cdot 8a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})^2\,d\cos\frac{t}{2}\quad=-16a^3\int_1^{-1}(1-u^2)^2\,du=$$

$$=-16a^3\int_1^{-1}(1-2u^2+u^4)du=\dots$$

3) $OA: y=2x$, $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx=\sqrt{5}\,dx$

$$\int_C\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=\sqrt{5}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}=\sqrt{5}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}}=\ln|\sqrt{5}\,x+\sqrt{5x^2+4}\,|\Big|_0^1=$$

$$=\ln|\sqrt{5}+3|-\ln 2$$

II

3) $y = 1 - |1-x| = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ $\quad \int\limits_{AB} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy =$

$$= \int\limits_{\substack{AD \\ y=x \\ dy=dx \\ 0\le x\le 1}} + \int\limits_{\substack{DB \\ y=2-x \\ dy=-dx \\ 1\le x\le 2}} = \int_0^1 2x^2dx + 0\,dx + \int_1^2 (x^2+(2-x)^2)dx + (x^2-(2-x)^2)(-dx)$$

5) $OB: \begin{cases} x=-2t \\ y=4t \\ z=5t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1,$

$$\int\limits_C x\,y^2dx + yz^2dy - x^2z\,dz = \int_0^1 -2t\,16t^2(-2dt) + 4t\,25t^2\,4dt - 4t^2\,5t\,5dt$$

III

1) $x^2+y^2=R^2 \quad :C \quad \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \;(0 \le t \le 2\pi),$

$$d\,l = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = Rdt, \qquad L = \int\limits_C dl = \int_0^{2\pi} Rdt = 2\pi R$$

IV

$$3)\ dl = \sqrt{1+4x^2}\,dx, \quad m = \int\limits_C f(x,y)dl = \int\limits_C xdl = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,d\left(1+4x^2\right) =$$

$$= \left.\frac{\left(1+4x^2\right)^{3/2}}{12}\right|_0^1$$

V

1) $D(2,0,0), B(2,0,6\pi)$; $C: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3t$; $\quad \overline{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z^2\right)$

$D(2,0,0) \Rightarrow 2 = 2\cos t, 0 = 2\sin t, 0 = 3t \Rightarrow t_D = 0$

$B(2,0,6\pi) \Rightarrow 2 = 2\cos t, 0 = 2\sin t, 6\pi = 3t \Rightarrow t_B = 2\pi$

$$\mathrm{A} = \int\limits_{AB} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy + z^2dz =$$

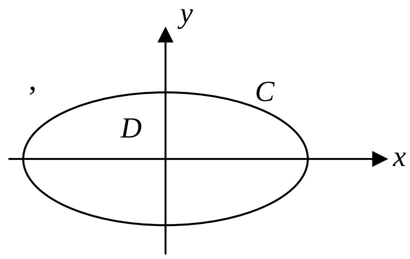
$$\int_0^{2\pi} \frac{-2\sin t}{4}(-2\sin t dt) + \frac{2\cos t}{4}(2\cos t dt) + 9t^2(3dt) = \int_0^{2\pi} dt + 27t^2dt = (9t^3+t)\Big|_0^{2\pi}$$

VI

$$3)\ P=x+y\ ,\ Q=x-y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$$

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_{\substack{y=1\\0\le x\le 2\\dy=0}}+\int\limits_{\substack{x=2\\1\le y\le 3\\dx=0}}=\int_0^2(x+1)dx+\int_1^3(2-y)dy=\dots$$

VII



$$4)\ \oint_C Pdx+Q\,dy=\iint_D(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy\ ,\quad P=x+y,\ Q=-x+y\quad ,$$

$$\oint_C(x+y)dx-(x-y)\,dy=\iint_D(-1-1)\,dx\,dy=-2\iint_D dx\,dy$$

VIII

$$1)\ dz=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$$

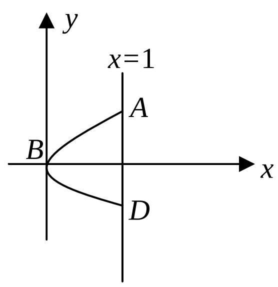
$$z'_x=x^2+2xy-y^2\Rightarrow z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2+g(y)\Rightarrow z'_y=x^2-2xy+g'(y)$$

$$z'_y=x^2-2xy-y^2\Rightarrow g'(y)=-y^2\Rightarrow$$

$$g(y)=-\frac{y^3}{3}+C,\qquad z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$$

IX

$$2)\ S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\substack{ABD:x=y^2\\dx=2ydy}}+\int\limits_{\substack{DA:x=1\\dx=0}}\right]=$$



.

$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^{-1}y^2dy-y2ydy+\int_{-1}^{1}dy\right]$$

תרגול 11
משטחים

I נתון משטח בצורה וקטורית. רשום משוואת המשטח בקאורדינטות קרטזיות. קבע איזו צורה גיאומטרית מייצגת המשוואה.

1. $\vec r(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u^2)$
2. $\vec r(u,v)=(v\cos u, v\sin u, \sqrt{25-v^2})$
3. $\vec r(u,v)=v\,\vec i+u\,\vec j+\sqrt{u^2+v^2}\,\vec k$
4. $\vec r(\theta,\varphi)=(3\cos\theta\sin\varphi, 3\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\varphi)$
5. $\vec r(\theta,z)=(2\sqrt{z}\cos\theta)\,\vec i+(3\sqrt{z}\sin\theta)\,\vec j+z\,\vec k$

II .

1. מצא את משוואת מישור המשיק למשטח $\vec r(u,v)=(u+v, u-v, uv)$ בנקודה $(v=1, u=2)$
2. מצא את משוואת הנורמל למשטח $\vec r(u,v)=(u+v, u^2+v^2, u^3+v^3)$ בנקודה $(v=1, u=2)$
3. מצא את משוואת הנורמל למשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ בנקודה $(3,4,-7)$
4. מצא את משוואת המישור המשיק למשטח $x^2+y^2+z^2=4z$ בנקודה $(0,2,2)$

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

III. חשב את האינטגרלים הבאים:

1. $\iint_S 3z\,ds$ כאשר S הוא חלק של הפרבולויד $z\ge 0,\ z=2-x^2-y^2$
2. $\iint_S z(x+y)\,ds$ כאשר S הוא חלק של הגליל $0\le y\le 5,\ z=\sqrt{4-x^2}$
3. $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,ds$ כאשר S הוא חלק של החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מעל העיגול $x^2+y^2\le 2x$

IV.

1. מצא את שטח הפנים של המשטחים הבאים:

   א. חלק מהמישור $x+2y+3z=6$ בין המישורים $z=0, y=0, x=0$

   ב. חלק של הפרבולויד $z\ge 0,\ z=2-x^2-y^2$
2. חשב את המסה של חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=9$, $(z\ge 0)$ בעל צפיפות משטחית בכל נקודה השווה למרחק מהנקודה עד המישור xy

אינטגרל משטחי מסוג שני

V. חשב $\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy$

1. $P=x, Q=y, R=z$ ו- S הצד החיצוני של חצי הכדור $x^2+y^2+z^2=16$, $(z\ge 0)$
2. $P=y, Q=-x, R=0$ ו-S הצד החיצוני של החרוט $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 3$
3. $P=y-x, Q=x+y, R=y$ ו- S הצד העליון של $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, $x+y+z=1$
4. $P=y-z, Q=z-x, R=x-y$ ו-S הצד החיצוני של החרוט $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 4$

VI. חשב את השטף $\left(\iint_S \vec F\cdot\vec n\,ds=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy\right)$ של השדה הוקטורי $\vec F=(P,Q,R)$ דרך המשטח S

1. $\vec F=4x\,\vec i+y\,\vec j+z\,\vec k$ ו- S הצד העליון של $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, $2x+2y+z=4$
2. $\vec F=(y-z)\,\vec i+(z-x)\,\vec j+(x-y-1)\,\vec k$ דרך המשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מ- $z=0$ עד $z=1$ כלפי חוץ

VII. חשב דיברגנט של שדה וקטורי :

1. $\vec F = x\,\vec i + y\,\vec j + z\,\vec k$ 2. $\vec F = xyz\,\vec i + e^x y^2 z\,\vec j + \vec k$

3. $\vec F = x^2\,\vec i + y^2\,\vec j + z^2\,\vec k$ בנקודה $M(1,1,-2)$

4. $\vec F = x\,\vec i + 3\,\vec j - z^2\,\vec k$ בנקודה $M(0,1,-1)$

VIII. חשב רוטור של שדה וקטורי :

1. $\vec F = z^2\,\vec i + x^2\,\vec j + y^2\,\vec k$ בנקודה $M(1,-1,2)$

2. $\vec F = (2xz^3 + 6y)\,\vec i + (6x - 2yz)\,\vec j + (3x^2z^2 - y^2)\,\vec k$

3. $\vec F = y^2z^2\,\vec i + x^2z^2\,\vec j + x^2y^2\,\vec k$ בנקודה $M(1,2,3)$

4. $\vec F = xy\,\vec i + yz\,\vec j + xz\,\vec k$

IX. הוכח עבור שדות וקטוריים כלליים $\vec G(x,y,z), \vec F(x,y,z)$ ופונקציה סקלרית $f(x,y,z)$ מקיימים :

1. $\operatorname{div}(\vec F \pm \vec G) = \operatorname{div}\vec F \pm \operatorname{div}\vec G$ 2. $\operatorname{rot}(\vec F \pm \vec G) = \operatorname{rot}\vec F \pm \operatorname{rot}\vec G$

3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec F) = 0$ 4. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

משפט גאוס

X. חשב את השטף של השדה הוקטורי $\vec F$ דרך המשטח S

1. $\vec F = x^2\,\vec i + y^2\,\vec j + z^2\,\vec k$ כאשר S הוא שפת קוביה : $\{0 \le z \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$

2. $\vec F = 3x\,\vec i + 4y\,\vec j - z\,\vec k$ כאשר S הוא שפה של תחום : $\left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}$

3. $\vec F = 3xy^2\,\vec i - (y^3 + x)\,\vec j + 2z\,\vec k$ דרך המשטח $z = \sqrt{x^2+y^2}$ מ- $z=0$ עד $z=1$ כלפי חוץ

4. $\vec F = xy\vec i + 2y\,\vec j - z\,\vec k$, $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

5. $\vec F = (y-z)\,\vec i + (z-x)\,\vec j + (x-y-1)\vec k$ דרך המשטח $z = \sqrt{x^2+y^2}$
מ- $z=0$ עד $z=1$ כלפי חוץ

6. מצא בעזרת נוסחת גאוס השטף של שדה וקטורי $\vec F = x\vec i + y\,\vec j + z\,\vec k$ דרך צד
חיצוני של משטח סגור S המוגדר ע"י המשוואות : $z=0$; $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $(0 \le z \le 1)$

משפט סטוקס $\iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec F \cdot \vec n)\,ds = \oint\limits_\Gamma \vec F \cdot d\vec r$

XI. חשב את צירקולציה של $\vec F$ כאשר

1. $\vec F = (x+3y+2z)\,\vec i + (2x+z)\,\vec j + (x-y)\vec k$, Γ הוא קו שבור $ACBA$
$A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,1)$

2. $\oint\limits_\Gamma (3x+2y)dx + (z-y^2)dy + (x+1)dz$, $\Gamma: \{x^2+y^2+z^2 = a^2, x+y+z=0\}$

3. $\vec F = y\vec i + x^2\,\vec j - z\,\vec k$, $\Gamma: \{x^2+y^2 = 4, \quad z=1\}$

4. $\vec F = (y,-x,z)$, $\Gamma: \left\{x^2+y^2+z^2 = 8, z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$

5. $\vec F = (x-y)\vec i + (x-z)\,\vec j + (y-x)\vec k$, $\Gamma: \{x^2+y^2 = 1, \quad x+z=1\}$

6. $\vec F = (1 - x^2y^3, 1, z)$, $\Gamma: \{x^2+y^2 = a^2, z=0\}$

תשובות

I.

$1)\ z=x^2+y^2 \quad 2)\ z=\sqrt{25-x^2-y^2} \quad 3)\ z=\sqrt{x^2+y^2} \quad 4)\ x^2+y^2+z^2=9 \quad 5)\ z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

פרבולויד חצי כדור חצי חרוט כדור פרבולויד

II.

$1.\ 3x-y-2z=4 \qquad 2.\begin{cases}x=3+12t\\ y=5-9t\\ z=9+2t\end{cases} \qquad 3.\begin{cases}x=3+17t\\ y=4+11t\\ z=-7+5t\end{cases} \qquad 4.\ y=2$

III. $1)\ 11.1\pi \qquad 2)\ 100 \qquad 3)\ 3\sqrt{2}\,\pi$

IV. 1.א) $3\sqrt{14}$ 1.ב) $13\pi/3$ 2) 27π

V. $1)\ 128\pi \qquad 2)\ 0 \qquad 3)\ 0.5 \qquad 4)\ 0$

VI. $1)\ 16 \qquad 2)\ \pi$

VII. $1)\ 3 \qquad 2)\ yz+2e^x yz \qquad 3)\ 0 \qquad 4)\ 3$

VIII. $1)\ (-2,4,2) \qquad 2)\ (0,0,0) \qquad 3)\ (-2,16,-18) \qquad 4)\ (-y,-z,-x)$

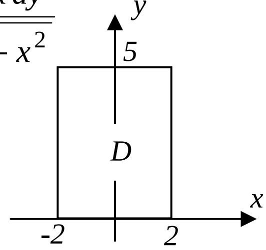
X. $1)\ 3 \qquad 2)\ \pi \qquad 3)\ -\frac{4}{3}\pi \qquad 4)\ \frac{32}{3}\pi \qquad 5)\ \pi \qquad 6)\ \pi$

XI. $1)\ -5 \quad 2)\ -4\pi a^2/\sqrt{3} \quad 3)\ -4\pi \quad 4)\ -8\pi \quad 5)\ 4\pi \quad 6)\ \pi a^6/8$

פתרונות

III.

$$2)\ z=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow ds=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx\,dy=\frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2}}$$



$$\iint_S z(x+y)\,ds=\iint_D \sqrt{4-x^2}\,(x+y)\frac{2\,dx\,dy}{\sqrt{4-x^2}}=2\int_{-2}^{2}dx\int_0^5(x+y)\ dy$$

$$3)\ z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dx\,dy$$

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,ds=\iint_D (x^2+y^2+x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy=2\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)\ dx\,dy=$$

$$=2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\,(r\,dr)=8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^4\ d\theta=8\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(1+\cos 2\theta)^2}{4}\ d\theta=\ldots$$

IV.

$$1.\text{א})\ x+2y+3z=6 \Rightarrow z=\frac{6-x-2y}{3} \Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy$$

$$S=\iint_S ds=\iint_D \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^3 dy\int_0^{6-2y} dx$$

$$2)\ m=\iint_S z\,ds=\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\ \sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2-y^2}+\frac{y^2}{9-x^2-y^2}}\ dx\,dy=3\iint_D\ dx\,dy$$

V

$$\left.\begin{matrix}3.\ f(x,y,z)=0\Rightarrow \vec{N}=(f'_x\,,\,f'_y\,,\,f'_z\,)\,,\,x+y+z=1\Rightarrow \vec{N}=(1,1,1)\Rightarrow \vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\\ \vec{F}=(P,Q,R)=(y-x)\ \vec{i}\ +(x+y)\ \vec{j}\ +y\,\vec{k}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\vec{F}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}\ y,$

$$x+y+z=1\Rightarrow z=1-x-y\Rightarrow ds=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\ dx\,dy=\sqrt{3}\,dx\,dy$$

$$\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy=\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_S\sqrt{3}\ y\,ds=\iint_D\sqrt{3}\ y\,\sqrt{3}\,dx\,dy=3\int_0^1 y dy\int_0^{1-y}dx=...$$

$$\text{VII}.\ 4)\ \vec{F}=P\,\vec{i}\ +Q\,\vec{j}\ +R\,\vec{k}\,,\quad \operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},\ \operatorname{div}(x\,\vec{i}\ +3\,\vec{j}\ -z^2\,\vec{k})=1+0-2z$$

$$\text{VIII}.4)\ \vec{F}=P\ \vec{i}\ +Q\,\vec{j}\ +R\,\vec{k}\,,\quad \operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(R'_y-Q'_z\,,P'_z-R'_x\,,Q'_x-P'_y)$$

$$\operatorname{rot}(xy\ \vec{i}\ +yz\,\vec{j}\ +xz\,\vec{k})=(0-y,0-z,0-x)$$

$$\text{IX}.\ 1)\ \vec{F}=P\ \vec{i}\ +Q\,\vec{j}\ +R\,\vec{k}\,,\quad \vec{G}=M\,\vec{i}\ +N\,\vec{j}\ +K\,\vec{k}\,,$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}+\vec{G})=\operatorname{div}(P+M,Q+N,R+K)=(P+M)'_x+(Q+N)'_y+(R+K)'_z=$$

$$=(P'_x+Q'_y+R'_z)+(M'_x+N'_y+K'_z)=\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{div}\vec{G}$$

$$\text{X}.3)\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\oiint_{S\cup(z=1)}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds-\iint_{z=1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$\oiint_{S\cup(z=1)}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\ dv=\iiint_V(3y^2-3y^2+2)\ dv=2\iiint_V\ dv=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot1\cdot1=\frac{2}{3}\pi$$

$$z=1\Rightarrow \vec{n}=(0,0,1)\,,\,\vec{F}\cdot\vec{n}=2z\,,\,ds=dx\,dy\,,\ \iint_{z=1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{z=1}2z\,ds=\iint_{x^2+y^2\le1}2\,dx\,dy=2\pi$$

XI .

<u>דרך 1</u>

$$1)\ \vec{F}=(x+3y+2z)\ \vec{i}+(2x+z)\ \vec{j}+(x-y)\vec{k}$$

$$\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_{\Gamma}(x+3y+2z)\,dx+(2x+z)\,dy+(x-y)dz=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}$$

<u>דרך 2</u>

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(R'_y-Q'_z,P'_z-R'_x,Q'_x-P'_y)=(-2,1,-1)$$

$$ABC:3x+2y+6z=6\Rightarrow\vec{n}=\frac{1}{7}(3,2,6)\,,\ \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}=-\frac{10}{7}$$

$$3x+2y+6z=6\Rightarrow ds=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}\,dx\,dy=\frac{7}{6}\,dx\,dy$$

$$\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S}\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{F}\,ds=\iint_{S}-\frac{10}{7}\,ds=\iint_{D}-\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{6}\,dx\,dy=-\frac{5}{3}\iint_{D}dx\,dy=-\frac{5}{3}\cdot\frac{3\cdot 2}{2}$$