אינטגרציה של פונקציות רבות משתנים

תרגילים:

.1 חשב אינטגרל קווי $\int_L x^2 ydx + xy^3dy$ כאשר L הוא ריבוע $A(0,0),\ \ B(1,0),\ \ C(1,1),\ \ D(0,1)$ ע"י

א) דרך ישירה

ב) משפט גרין

.2 חשב אינטגרל ע"י נוסחת גרין :

א) $\int_L x^2dx + y^2dy$ כאשר L עקומה $x^6 + y^6 = 1$

ב) $\int_L xydx + x^2dy$ כאשר L קרדיואידה $r = 1 + cos\varphi$

.3 הראה, ששדה הבא הוא שדה משמר ומצא פוטנציאל של שדה f

א) $\overline{F} = \frac{\overline{r}}{r}$

ב) $\overline{F} = \left(yz + \frac{1}{yz}\right)i + \left(xz - \frac{x}{y^2z}\right)j + \left(xy - \frac{x}{yz^2}\right)k$

ג) $\overline{F} = r \cdot \overline{r}$ כאשר $\overline{r} = xi + yj + zk,\ \ r = \left|\overline{r}\right|$

.4 הראה כי

א) $div\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\,rot\,\vec{F} - \vec{F}\,rot\,\vec{G}$

ב) $div\left(grad\ f \times grad\ g\right) = 0$

.5 נתון $\vec{r} = xi + yj + zk$, $r = \left|\vec{r}\right|$. הראה, כי

א) $\nabla\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ ב) $\nabla\cdot\vec{r} = 3$ ג) $\nabla\times\vec{r} = 0$

ד) $\nabla\left(\frac{1}{\vec{r}}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ ה) $\nabla\cdot\left(r\,\vec{r}\right) = 4r$ ו) $\nabla(\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^3}$

6. חשב אינטגרל משטחי מסוג ראשון :

א) $\iint_S y\,ds$ כאשר S חלק של מישור $3x+2y+z=6$, $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$

ב) $\iint_S xz\,ds$ כאשר S משולש $A(1,0,0),\ \ B(0,1,0),\ \ C(0,0,1)$

ג) $\iint_S x\,ds$ כאשר S חלק של משטח $y=x^2+4z$ כאשר $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$

ד) $\iint_S x\left(y^2+z^2\right)ds$ כאשר S חלק של פרבולויד $x=4-x^2-z^2$ כאשר $x\ge 0$

ה) $\iint_S yz\,ds$ כאשר S חלק של מישור $z=y+3$ בפנים גליל $x^2+y^2=1$

7. חשב $\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,ds$ כאשר

א) $\overline{F}=xi+xyj+xzk$, $S-$ חלק של מישור $3x+2y+z=6$, $x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0$

ב) $\overline{F}=-xi-yj+z^2k$, $S-$ חלק של $z=\sqrt{x^2+y^2}$ בין מישורים $z=1$, $z=2$

ג) $\overline{F}=yj-zk$, S מורכב מ- $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$ וגם עיגול $\begin{cases}x^2+z^2\le 1\\ y=1\end{cases}$

ד) $\overline{F}=xi+yj+5k$, $S-$ שפה של תחום החסום ע"י $x^2+z^2=1$, $y=0$, $x+y=2$

8. חשב $\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,ds$ ע"י משפט גאוס

א) $\overline{F}=3y^2z^3i+9x^2yz^2j-4xy^2k$, כאשר $S-$ משטח פנים של קובייה בעלת קודקודים $(\pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1)$

ב) $\overline{F}=-xzi-yzj+z^2k$, כאשר S אליפסויד $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

ג) $\overline{F}=x^3i+2xz^2j+3y^2zk$, כאשר $S-$ משטח פנים של תחום החסום ע"י $z=4-x^2-y^2$, $z=0$

ד) $\overline{F}=ye^{z^2}i+y^2j+e^{xy}k$, כאשר $S-$ משטח פנים של תחום החסום ע"י

$z=y-3,\ \ z=0,\ \ x^2+y^2=9$

ה) $\overline{F}=xy^2i+yzj+zx^2k$, כאשר $S-$ משטח פנים של תחום החסום ע"י

$z=3,\ \ z=1,\ \ x^2+y^2=4,\ \ x^2+y^2=1$

9. חשב $\int_L \overline{F}\,\overline{dr}$ ע"י משפט סטוקס :

א) $\overline{F} = xzi + 2xyj + 3xyk$,כאשר $L -$ גבול של חלק המישור $3x + 2y + z = 3$ $x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0,$

ב) $\overline{F} = z^2 i + y^2 j + xyk$, כאשר $L -$ משולש $A(1,0,0),\ \ B(0,1,0),\ \ C(0,0,2)$

ג) $\overline{F} = 2zi + 4xj + 5yk$,כאשר $L -$ חיתוך של $z = x + 4$ ו- $x^2 + y^2 = 4$

ד) $\overline{F} = xi + yj + (x^2 + y^2)k$,כאשר $L -$ גבול של חלק $z = 1 - x^2 - y^2$ $x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0,$

תשובות :

1) $\frac{-1}{12}$ 2) 0 4) 0

3) א) $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$ ב) $f = xyz + \frac{x}{yz} + C$

ג) $f = \frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3 + C$ ד) $ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$

6) א) $3\sqrt{14}$ ב) $\frac{1}{8\sqrt{3}}$ ג) $\frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6}$ ד) $\frac{\pi}{60}\left(391\sqrt{17} + 1\right)$ ה) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

7) א) 12 ב) $\frac{73}{6}\pi$ ג) $-\pi + \pi = 0$ ד) $2\pi + 2\pi + 0 = 4\pi$

8) א) 3 ב) 0 ג) 32π ד) $-\frac{81}{2}\pi$ ה) 27π

9) א) $\frac{7}{2}$ ב) $\frac{4}{3}$ ג) -4π ד) 0