

## אלגברה וקטורית

### תרגילים:

1. נתונים הנקודות:  $A(2,-1,2), B(1,2,-1), C(3,2,1)$ .  
 (חשב: א)  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$  ב)  $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$ .
2. חשב את נפח המקבילון אשר אחד הקודקודים שלו נמצא בראשית הצירים ושלושת הקודקודים הסמוכים – בנקודות:  $(4,1,2), (2,1,3), (-3,2,1)$ .
3. נתונים וקטורים  $\mathbf{c} = (1,2,3), \mathbf{b} = (-3,1,2), \mathbf{a} = (2,-3,1)$ .  
 חשב את א)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  ב)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .
4. בדוק האם וקטורים הבאים קומפלנריים:  
 א)  $\mathbf{a} = (2,1,-1), \mathbf{b} = (1,-1,3), \mathbf{c} = (1,9,-11)$  ב)  $\mathbf{a} = (3,-2,1), \mathbf{b} = (2,1,2), \mathbf{c} = (3,-1,-2)$ .
5. בדוק כי מתקיים השוויון  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  עבור:  
 $\mathbf{a} = (2,4,1), \mathbf{b} = (-1,1,3), \mathbf{c} = (2,-1,1)$ .
6. חשב את נפח הפרמידה ABCS כאשר  $A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), S(4,1,3)$ .
7. הוכח כי 4 נקודות  $A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3)$  נמצאות על מישור אחד.
8. הוכח: אם  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  וקטורים אזי  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = 0$  קומפלנריים.

## גיאומטריה אנליטית במרחב תלת-מימדי

### תרגילים:

1. רשום משוואה פרמטרית של קו ישר העבור דרך הנקודה A מקביל לוקטור  $\mathbf{b}$ :  
 $A(2,-1,3), \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
2. רשום משוואה קנונית של קו ישר העבור דרך הנקודות A ו-B:  
 $A(2,5,-1), B(3,8,0)$
3. נתונה נקודה  $A(3,-1,4)$  ו-ישר  $(l): \mathbf{r} = (4,3,-5) + t(-1,2,3)$ . מצא  
 א) מרחק בין הנקודה לישר ב) היטל הנקודה על הישר.
4. נתונות שלוש הנקודות  $\mathbf{a}(0,0,1), \mathbf{b}(2,2,-2), \mathbf{c}(2,1,-1)$  ושלושה ווקטורים  
 $\mathbf{u}(1,-5,-1), \mathbf{v}(2,1,-3), \mathbf{w}(-4,-2,6)$ . קבע אלה מן הישרים  $(l_1) \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{v}t$ ,  
 $(l_2) \mathbf{r} = \mathbf{b} + \mathbf{u}t$ ,  $(l_3) \mathbf{r} = \mathbf{c} + \mathbf{w}t$  א) מקבילים; ב) מאונכים; ג) חתכים; ד) מצטלבים.

$$5. \text{ חשב זווית חדה בין שני הישרים: } \begin{cases} x=3t \\ y=-1-t \\ z=1+2t \end{cases} \text{ ו- } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4}$$

6. מצא משוואת המישור שעבור דרך הנקודה  $A(20,12,15)$  מאונך לוקטור  $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

7. מצא משוואת המישור שעבור דרך שלוש הנקודות הנתונות:  
 $A(2,0,5), B(0,4,3), C(6,4,0)$

8. רשום משוואת המישור שעבור דרך הנקודה  $A(1,1,1)$  ומקביל למישור  $3x + y - 9z + 2 = 0$

9. מצא משוואת המישור שעבור דרך הנקודה  $A$  מאונך לשני המישורים הנתונים:  
 $A(1,3,2), x + 2y + z - 4 = 0, 2x + y + 3z + 5 = 0$

10. חשב נפח הפרמידה החסומה על ידי המישורים  $x=0, y=0, z=0$  ו-  $3x - 6y + 2z = 12$

11. מצא היטל הנקודה  $A(-1,-1,-3)$  על המישור  $3x + 2y + 6z = 6$

12. מצא נקודת חיתוך של הישר  $\mathbf{r} = (1,1,0) + t(2,5,3)$  עם המישור  $x + y + z = 2$

13. מצא זווית בין המישורים  $2x + 2y - z = 3$  ו-  $x + 2y + z = 2$

14. מצא הצגה פרמטרית של הישר החיתוך של מישורים  $x + y - 2z = 5$  ו-  $x - 2y + 4z = 2$

$$15. \text{ מצא זווית בין ישרים } \left. \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 5x + 4y - z = 7 \end{cases} \right\} \text{ ו- } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+5}{3}$$

16. על הציר ה- $X$  מצא נקודה הנמצאת במרחק שווה מן המישורים  $2x + 2y - z = 1$  ו-  $12x - 16y + 15z + 1 = 0$

17. מצא נקודת חיתוך של המישורים הבאים:

$$x + y - z + 2 = 0, x + 2y - 1 = 0, x - y + z = 0$$

18. מצא נקודה סימטרית לנקודה  $A(2,-3,4)$  ביחס למישור  $3x + 4y + 5z + 36 = 0$

19. מצא נקודה סימטרית לנקודה  $A(4,3,10)$  ביחס לישר  $\mathbf{r} = (1,2,3) + (2,4,5)t$

20. מצא מרחק מנקודה  $A(3,9,1)$  עד המישור  $x - 2y + 2z - 3 = 0$

$$21. \text{ חשב זווית בין הישר } \left. \begin{cases} 3x - 2z - 2 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \right\} \text{ ו- המישור } 2x + y + z + 5 = 0$$

22. מצא מרחק בין המישורים המקבילים:  $19x - 4y + 8z + 21 = 0$

$$19x - 4y + 8z - 21 = 0$$

23. הוכח כי שני הישרים הבאים מקבילים ומצא משוואת המישור שעובר דרכם:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 5t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ו-} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-10} = \frac{z-5}{-4}$$

### פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי

#### תרגילים:

- I. עובר לקאורדינטות קרטזיות ושרטט את העקומות המישוריות הבאות:
1.  $0 \leq t < 2\pi$ .  $y = \sin t$ ,  $x = \cos t$ ,  $y = 2 + 4\sin t$ ,  $x = 3 + 2\cos t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ .
  3.  $0 \leq t < 2\pi$ .  $x = \cos t$ ,  $y = \sin^2 t$ .
  4.  $-\infty < t < +\infty$   $\mathbf{r}(t) = t \cdot \mathbf{i} + (3t^2 + 1) \cdot \mathbf{j}$ .

שרטט את העקומה המרחבית

$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t \cdot \mathbf{i} + 3\sin t \cdot \mathbf{j} + t \cdot \mathbf{k} \quad -\infty < t < +\infty. \quad 5.$$

II. מצא את ההצגה פרמטרית של העקומות הבאות:

6.  $-\infty < x < +\infty$ .  $y = \sin x$ .
7.  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ .
8.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ .
9.  $64x^2 + 9y^2 = 1$ .
10.  $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ .
11.  $\begin{cases} x^2 = z \\ y^2 = x \end{cases}$ .

III. פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי.

12. גזור את הפונקציה:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \frac{1}{2} \tan^4 2t - \mathbf{j} t \cos t + \mathbf{k} \ln 4t$ .
13. לעקומות הבאות מצא את המשוואת המשיק בנקודה M הנתונה:
  - א)  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(te^{-t} + 3) + \mathbf{j}\sqrt{4+5t} + \mathbf{k} \arctan 2t$  נקודה M מתאימה ל-  $t=0$ .
  - ב)  $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t, t)$ ,  $M(2,0,0)$ .
  - ג)  $\begin{cases} z = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$ ,  $M(1,1,1)$ .
14. על העקומה  $\mathbf{r}(t) = (t^2, t, 5)$  מצא את הנקודה M שבה ישר המשיק מקביל למישור  $x - 6y + 4z = 3$ .
15. עבור  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos 2t + \mathbf{j} \sin 2t + \mathbf{k} t^2$  מצא את  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $|\mathbf{r}'(t)|$ .
16. מצא את הזווית בין וקטורים  $\mathbf{r}'(t)$  ו-  $\mathbf{r}''(t)$  בנקודה המתאימה  $t=0$ .
 

אם  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \ln(t^2 + 1) + \mathbf{j} \arctan t + \mathbf{k} \sqrt{t^2 + 1}$ .
17. חלקיק נע לפי חוק התנועה  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} \cos \alpha \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \alpha \cos \omega t + \mathbf{k} \sin \omega t$ . מצא את מהירות, תאוצה וערכים שלהן כפונקציות של זמן.

18. נתון רדיוס-ווקטור של נקודה כפונקציות של זמן:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{k}$

( $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$  -מהירות התחלתית) . מצא את מהירות, תאוצה וערכים שלהן.

19. מהירות  $\mathbf{v}(t)$  של חלקיק משתנה לפי החוק  $\mathbf{v}(t) = (2, -1, -10t)$  . ברגע

$t = 0$  החלקיק נמצא בנקודה  $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 100)$  . מצא את המשוואת תנועה  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  של החלקיק.

20. תאוצה של חלקיק תלויה בזמן לפי נוסחה  $\mathbf{w}(t) = 18 \cos 3t \mathbf{i} - 18 \sin 3t \mathbf{j}$  . רדיוס-

וקטור תחילתי ומהירות תחלתית של חלקיק הם  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) = (2, 0, 1)$  ו

$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0) = (0, 2, 4)$  .

מצא משוואת התנועה של החלקיק.

### משטחים במרחב:

1. ציירו משטחים הבאים:

(א)  $x^2 = 4y$

(ב)  $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$

(ג)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(ד)  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$

(ה)  $x^2 + y^2 - z^2 - 2y = 0$

(ו)  $x^2 - z^2 = 0$

(ז)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

(ח)  $y = x^2 + z^2$

בהצלחה!

### תשובות:

### אלגברה וקטורית

(1) (א)  $6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$  (ב)  $-12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$  .

(2)  $V = 17$  . (3) (א)  $7(-1, 2, -1)$  (ב)  $(10, 13, 19)$  . (4) (א) לא; (ב) לא .

(6)  $V_{ABCS} = 3$  .

**גיאומטריה אנליטית במרחב תלת-מימדי**

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{1} \quad (2) \quad (l): \mathbf{r} = (2, -1, 3) + (3, 1, -4)t \quad (1)$$

$$d = 18\sqrt{\frac{3}{14}}; \quad \left(\frac{18}{7}, \frac{41}{7}, -\frac{5}{7}\right) \quad (3)$$

.  $x+y+z-47=0$  (6) .  $\varphi = 32.47^\circ$  (5) . מצטלבים.  $l_3, l_2, l_1; l_1 \parallel l_2, l_1 \perp l_3$  (4)

(11)  $8$  (10)  $.5x-y-3z+4=0$  (9)  $3x+y-9z+5=0$  (8)  $.2x+3y+4z-24=0$  (7)

(14)  $\theta = \arccos \frac{5}{3\sqrt{6}}$  (13)  $. (1,1,0)$  (12)  $\left(\frac{74}{67}; \frac{9}{67}; \frac{27}{67}\right)$

(16)  $\cos \theta = \frac{34}{\sqrt{8106}}$  (15)  $(l): \mathbf{r} = (4,1,0) + (0, -6, -3)t$

$\left(8, \frac{29}{5}, -\frac{28}{5}\right)$  (19)  $(-4, -11, -6)$  (18)  $(-1, 1, 2)$  (17)  $\left(\frac{11}{43}, 0, 0\right), (2, 0, 0)$

.  $17x+y+6z-33=0$  (23) . 2 (22)  $\cos \theta = \sqrt{\frac{29}{30}}$  (21)  $\frac{16}{3}$  (20)

**פונקציות וקטוריות של משתנה סקלרי**

$y = 1 + 3x^2$  (4)  $y = 1 - x^2$  (3)  $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$  (2)  $x^2 + y^2 = 1$  (1)

$\mathbf{r}(t) = (8 \cos^3 t, 8 \sin^3 t, 0)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  (7)  $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t, 0)$ ,  $-\infty < x < +\infty$  (1)

$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{8} \cos t, \frac{1}{3} \sin t, 0\right)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  (9)  $\mathbf{r}(t) = (t^2, 1-t^2, 0)$ ,  $0 \leq t < 1$  (8)

$\mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^4)$ ,  $-\infty < t < +\infty$  (11)  $\mathbf{r}(t) = (-1+2t, -3+3t, t)$ ,  $-\infty < t < +\infty$  (10)

$\mathbf{r}'(t) = \frac{4 \sin^3 2t}{\cos^5 2t} \mathbf{i} + (3t \sin 3t - \cos 3t) \mathbf{j} + \frac{4}{t} \mathbf{k}$  (12)

$\mathbf{r} = (1,1,1) + (2,1,4)t$  (א)  $\mathbf{r} = (2,0,0) + (0,3,1)t$  (ב)  $\mathbf{r} = (3,2,0) + (1, \frac{5}{4}, 2)t$  (א) (13)

$|\mathbf{r}(t)|' = \frac{2t^3}{\sqrt{1+t^4}}$ ,  $|\mathbf{r}'(t)| = 2\sqrt{2+t^2}$ ,  $\mathbf{r}'(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t, 2t)$  (15)  $M(9,3,5)$  (14)

$|\mathbf{v}| = \omega$ ;  $\mathbf{v}(t) = (-\omega \cos \alpha \sin \omega t, -\omega \sin \alpha \sin \omega t, \omega \cos \omega t)$  (17)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (16)

$|\mathbf{w}| = \omega^2$ ;  $\mathbf{w}(t) = (-\omega^2 \cos \alpha \cos \omega t, -\omega^2 \sin \alpha \cos \omega t, -\omega^2 \sin \omega t)$

$\mathbf{w}(t) = (0, 0, -g)$ ;  $\mathbf{v}(t) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} - gt)$  (18)

$\mathbf{r}(t) = (4 - 2 \cos 3t, 2 \sin 3t - 4t, 4t + 1)$  (20)  $\mathbf{r}(t) = (2t, -t, 100 - 5t^2)$  (19)