תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 11. פתרונות

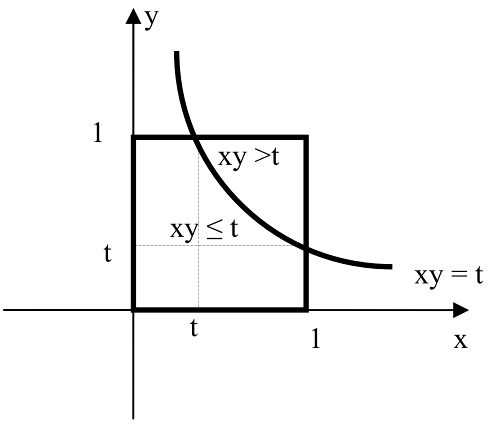
1. $f_X(x)=\begin{cases} ax^{a-1}, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases} ay^{a-1}, & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$ X,Y בלתי-תלויים $\Leftarrow$ $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} a^2x^{a-1}y^{a-1}, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$.

$Z=XY$. $0\le X\le 1$ בהסתברות 1, וגם $0\le Y\le 1$ בהסתברות 1 $\Leftarrow$ $0\le Z\le 1$ בהסתברות 1. $\Leftarrow$

$F_Z(t)=0$ עבור $t<0$, $F_Z(t)=1$ עבור $t\ge 1$. עבור $0\le t<1$ נקבל:

$$F_Z(t)=P\{Z\le t\}=P\{XY\le t\}=1-P\{XY>t\}=1-\int_t^1\left\{\int_{t/y}^1 a^2x^{a-1}y^{a-1}dx\right\}dy=t^a(1-a\ln t).$$

$$F_Z(t)=\begin{cases} 0 & , & t<0 \\ t^a(1-a\ln t) & , & 0\le t\le 1 \\ 1 & , & 1\le t \end{cases}$$

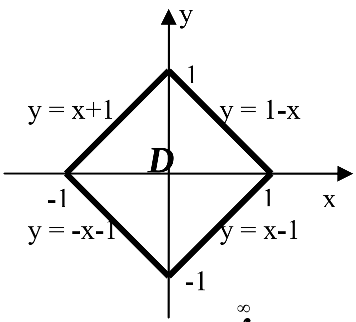


2. $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c, & (x,y)\in D \\ 0, & else \end{cases}$, כאשר D - הריבוע. $1=\iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy=\iint_D cdxdy=cS(D)=c\cdot 2$ $\Leftarrow$ $c=1/2$.

ברור שעבור $x\notin[-1.1]$ $f_X(x)=0$,

עבור $x\in[-1.0]$: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-x-1}^{x+1}1/2dy=x+1$,

עבור $x\in(0.1]$: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{x-1}^{1-x}1/2dy=1-x$.



$$f_X(x)=\begin{cases} 1+x & , & -1\le x\le 0 \\ 1-x & , & 0<x\le 1 \\ 0 & , & else \end{cases}.\quad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_0^1 x(1-x)dx=0$$ (מטעמי סימטריה)

ברור ש- $E(X)=0$, כי פונקצית הצפיפות של מ"מ X זוגית).

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_0^1x^2(1-x)dx=1/6,\ V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1/6.$$

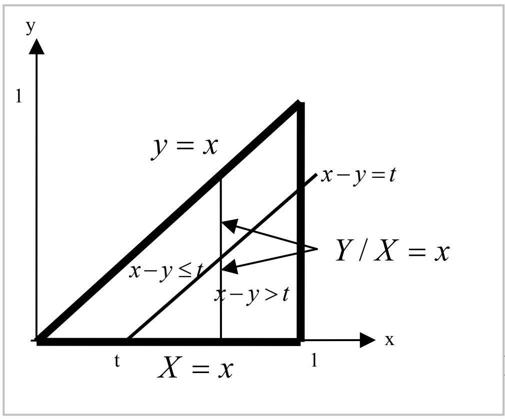
3. $X\sim N(0,\sigma^2)$, $Y\sim N(0,\sigma^2)$ ובלתי תלויים $\Leftarrow$ $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$.

$Z=X^2+Y^2$. $F_Z(t)=0 \Leftarrow Z\ge 0$ עבור $t<0$. עבור $t\ge 0$, בקואורדינאטות הקוטביות r,θ נקבל:

$$F_Z(t)=P\{Z\le t\}=P\{X^2+Y^2\le t\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le t}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}dxdy=\int_0^{\sqrt{t}}\int_0^{2\pi}\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}d\theta dr=$$

$$=1-e^{-\frac{t}{2\sigma^2}}$$

$$F_Z(t)=\begin{cases}1-e^{-t/2\sigma^2}, & t\ge 0\\ 0, & else\end{cases}.$$



4. $f_{Y/X}(y/x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y)=f_{Y/X}(y/x)\cdot f_X(x) \Rightarrow$

$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cdot 1, & 0<x<1,\ 0<y\le x\\ 0, & else\end{cases}$. $P\{X-Y\le t\}=\iint\limits_{x-y\le t}f_{X,Y}(x,y)dxdy$

עבור $0\le t<1$:

$$P\{X-Y\le t\}=\iint\limits_{x-y\le t}f_{X,Y}(x,y)dxdy=$$

(א)
$$1-\iint\limits_{x-y>t}f_{X,Y}(x,y)dxdy=1-\int_t^1\left\{\int_0^{x-t}\frac{1}{x}dy\right\}dx=1-\int_t^1\frac{x-t}{x}dx=t-t\ln t$$

עבור $t\ge 1$: $P\{X-Y\le t\}=1$, עבור $t<0$: $P\{X-Y\le t\}=0$

(ב) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\ln 2}{4}=\left.(-y\ln y+y)\right|_0^{1/4}=-\int_0^{1/4}\ln y\,dy=\int_0^{1/4}\left\{\int_y^1\frac{1}{x}dx\right\}dy=\iint\limits_{y\le 1/4}f_{X,Y}(x,y)dxdy=P\{Y\le 1/4\}$.

5. נגדיר מ"מ X_i כמספר הניסויים עד לקבלת מספר i-י חדש ($i=1,2,...,n$), אז מ"מ $X=X_1+X_2+...+X_n$ הוא מספר הדגימות הכולל עד אשר ידגימו את כל המספרים $1,2,...,n$.

$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)$. $X_1\equiv 1 \Rightarrow E(X_1)=1$. $X_2\sim G\left(\dfrac{n-1}{n}\right) \Rightarrow E(X_2)=\dfrac{n}{n-1}$.

$X_3\sim G\left(\dfrac{n-2}{n}\right) \Rightarrow E(X_3)=\dfrac{n}{n-2}$ ... $X_n\sim G\left(\dfrac{1}{n}\right) \Rightarrow E(X_n)=\dfrac{n}{1}=n$. $\Rightarrow$

$$E(X)=1+\frac{n}{n-1}+\frac{n}{n-2}+...+\frac{n}{1}=n\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right).$$

6. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x)dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}2xdy\right\}dx=\dfrac{1}{3}$. מטעמי סימטריה $E(Y)=\dfrac{1}{3}$.

$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{X,Y}(x)dxdy=\int_0^1\left\{\int_0^{1-x}2xydy\right\}dx=\dfrac{1}{12}$. $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{36}$.

7. נגדיר מ"מים $X_i=\begin{cases}1, & \text{התלכדות במקום ה}-i\\ 0, & else\end{cases}$, $i=1,2,...,n$, אז $X=X_1+X_2+...+X_n$ הוא מספר ההתלכדויות הכולל. $P(X_i=1)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n} \Rightarrow E(X_i)=1\cdot\dfrac{1}{n}+0\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}$.

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)=n\cdot\frac{1}{n}=1\ ,\quad E(X^2)=E[(X_1+X_2+...+X_n)(X_1+X_2+...+X_n)]=$$
$$=E[\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\sum_{i\neq j}X_iX_j]=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+\sum_{i\neq j}E(X_iX_j)$$

$E(X_i^2)=1^2\cdot\frac{1}{n}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$. עבור $i\neq j$, $P\{X_iX_j=1\}=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$ $\Leftarrow$ $E(X_iX_j)=1\cdot\frac{1}{n(n-1)}$.

$\Leftarrow$ $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+\sum_{i\neq j}E(X_iX_j)=n\cdot\frac{1}{n}+n(n-1)\cdot\frac{1}{n(n-1)}=2$. $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-1^2=1$.

8. $X\sim U(a,b)$, $\Leftarrow$ $E(X)=\frac{a+b}{2}$, $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$. לכן $\mu=E(X_i)=\frac{1}{2}$ $\sigma^2=V(X_i)=\frac{1}{12}$,
$\sigma=\sigma(X_i)=\sqrt{\frac{1}{12}}$. נסמן ב- S_n את הסכום $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. לפי משפט הגבול המרכזי
$P\left\{a<\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq b\right\}\approx\Phi(b)-\Phi(b)$, כאשר n גדול. לכן

$$P\{\sum_{i=1}^{10}X_i>6\}=P\{S_{10}>6\}=P\left\{\frac{S_{10}-10\mu}{\sigma\sqrt{10}}>\frac{6-10\mu}{\sigma\sqrt{10}}\right\}\approx1-\Phi\left(\frac{6-10\mu}{\sigma\sqrt{10}}\right)=$$
$$=1-\Phi\left(\frac{6-10\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{10/12}}\right)=1-\Phi\left(\sqrt{1.2}\right)\approx0.14$$

9. יהי X מספר הכדורים הפגומים. X הוא מ"מ בינומי $X\sim B(n,p)$, כאשר $n=10000$, $p=0.05$. X
אפשר להציג כסכום $X=S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ של משתנים מקריים בלתי-תלויים X_i : $X_i=1$, אם הכדור ה-i-י פגום,
ו- $X_i=0$, אם הכדור ה-i-י תקין. נשתמש במשפט הגבול המרכזי . $\mu=E(X_i)=p$, $\sigma^2=V(X_i)=p(1-p)$.
ממשפט הגבול המרכזי נובע,:

$$P\{X\leq C\}=P\{S_n\leq C\}=P\left\{\frac{S_n-np}{\sqrt{p(p-1)}\cdot\sqrt{n}}\leq\frac{C-500}{\sqrt{475}}\right\}=P\left\{\frac{S_n-500}{\sqrt{475}}\leq\frac{C-500}{\sqrt{475}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{C-500}{\sqrt{475}}\right)=0.99$$

מכאן $\frac{C-500}{\sqrt{475}}\approx2.3263$ ו- $C\approx550.7$, ז"א, קיבולת של המיכל צריכה להיות לפחות 551 כדורים.