תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 12. פתרונות

1 . $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, כאשר $\mu=75,\sigma^2=25$. $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, . מ"מ $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ הוא מ"מ נורמלי סטנדרטי ($N(0,1)$) . לכן

$$0.9\le P\{70\le \bar{X}_n\le 80\}=P\left\{\frac{70-75}{5/\sqrt{n}}\le\frac{\bar{X}_n-75}{5/\sqrt{n}}\le\frac{80-75}{5/\sqrt{n}}\right\}=P\left\{-\sqrt{n}\le\frac{\bar{X}_n-75}{5/\sqrt{n}}\le\sqrt{n}\right\}=$$

$$=\Phi\left(\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-\sqrt{n}\right)=2\Phi\left(\sqrt{n}\right)-1$$

מכאן $2\Phi\left(\sqrt{n}\right)-1\ge 0.9 \Leftarrow \Phi\left(\sqrt{n}\right)\ge 0.95 \Leftarrow \sqrt{n}\ge 1.645 \Leftarrow n\ge 2.7 \Leftarrow n\ge 3$.

2. לפי משפט הגבול המרכזי

$$P\{\bar{X}_{100}\ge 2\}=P\left\{\frac{\bar{X}_n-3}{8/\sqrt{100}}\ge\frac{2-3}{8/\sqrt{100}}\right\}=P\left\{\frac{\bar{X}_n-3}{8/\sqrt{100}}\ge -1.25\right\}\approx 1-\Phi\left(-1.25\right)=0.89$$

3. יהי X_i משקל של הביצה ה-i-ית. $X_i\sim N(60,10^2)$ והמ"מים X_i ($i=1,2,...,100$) בלתי-תלויים.

$$p=P\{X_i<55\}=P\left\{\frac{X_i-60}{10}<\frac{55-60}{10}\right\}=P\left\{\frac{X_i-60}{10}<-0.5\right\}=\Phi(-0.5)=0.3085 .$$

יהי Y כמות הביצים מספר 3 שנאספו בלול באותו יום, אז $Y\sim B(n,p)$, כאשר $n=100, p=0.3085$.

נשתמש בקירוב נורמלי להתפלגות בינומית ונקבל:

$$P\{Y\ge 30\}=P\left\{\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\ge\frac{30-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}=P\left\{\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\ge\frac{30-100\cdot 0.3085}{\sqrt{100\cdot 0.3085\cdot(1-0.3085)}}\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}\ge \text{-}0.18403\right\}\approx 1-\Phi(\text{-}0.1841)=0.573$$

4. (א) נמצא תחילה את פונקצית ההתפלגות של מ"מ Y - אורך החיים של מנורה ממכונה א'. אם $E=$ "נורה ממכונה א' פגומה", אז לפי נוסחת ההסתברות השלמה $F_Y(t)=P\{Y\le t\}=P\{Y\le t/E\}P(E)+P\{Y\le t/\bar{E}\}P(\bar{E})$.

$P\{Y\le t/E\}=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t\end{cases}$, כי אורך החיים של נורה פגומה הוא 0 , ו- $P\{Y\le t/\bar{E}\}=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-0.8t}, & 0\le t\end{cases}$,כי אורך החיים של נורה א' תקינה מפולג מעריכית עם פרמטר 0.8 .לכן

$F_Y(t)=0.1\cdot\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t\end{cases}+0.9\cdot\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-0.8t}, & 0\le t\end{cases}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-0.9e^{-0.8t},0, & 0\le t\end{cases}$. באופן דומה נמצא את פונקצית ההתפלגות של מ"מ Z - אורך החיים של נורה ממכונה ב':

$$F_Z(t)=0.15\cdot\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t\end{cases}+0.85\cdot\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-0.5t}, & 0\le t\end{cases}=\begin{cases}0 & t<0\\ 1-0.85e^{-0.5t}, & 0\le t\end{cases} .$$

יהי $A=$ "נורה הנבחרת באופן מקרי היא ממכונה א' ", אז $\bar{A}=$ "נורה הנבחרת באופן מקרי היא ממכונה ב' " ו- $P(A)=0.3, P(\bar{A})=0.7$.גם לפי נוסחת ההסתברות השלמה

$$F_X(t)=P\{X\le t\}=P\{X\le t/A\}P(A)+P\{X\le t/\bar{A}\}P(\bar{A})=F_Y(t)P(A)+F_Y(t)P(\bar{A})=$$

$$=0.3\cdot\begin{cases}0, & t<0\\ 1-0.9e^{-0.8t}, & 0\le t\end{cases}+0.7\cdot\begin{cases}0, & t<0\\ 1-0.85e^{-0.5t}, & 0\le t\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-0.27e^{-0.8t}-0.595e^{-0.5t}, & 0\le t\end{cases} .$$

(ב) $P\{Y>1/Y>0.5\}=\frac{P\{Y>1,Y>0.5\}}{P\{Y>0.5\}}=\frac{P\{Y>1\}}{P\{Y>0.5\}}=\frac{1-F_Y\{1\}}{1-F_Y\{0.5\}}=\frac{0.9e^{-0.8}}{0.9e^{-0.8\cdot 0.5}}=e^{-0.4}$

(ג) דרך ראשונה: יהי X_i אורך החיים של נורה i ($i=1,2,3,4$).מ"מים X_i שווי התפלגות ובלתי תלויים. יהי $B_i=\{X_i>1\}$ המאורע "הנורה ה-i-ית תעבוד יותר משנה".

$q=P(B_i)=P\{X_i>1\}=1-F_X(1)=0.27e^{-0.8}+0.595e^{-0.5}=0.4822$. המאורע שהמעגל יעבוד יותר משנה זהה למאורע $B_4\cap[B_3\cup(B_1\cap B_2)]$. מאי-תלות של מ"מים X_i נובע כי

$$P(B_4\cap[B_3\cup(B_1\cap B_2)])=P(B_4)\cdot P(B_3\cup(B_1\cap B_2))=$$

$$=P(B_4)\cdot(P(B_3)+P(B_1\cap B_2)-P(B_3\cap B_1\cap B_2))=q\cdot[q+q^2-q^3]=0.2905$$

דרך שנייה: יהי X_{AB} אורך החיים של מעגל AB. לפי נוסחאות להתפלגות מקסימום ומינימום של מ"מים בלתי-תלויים

$$F_{X_{AB}}(t)=1-(1-F_{X_4}(t))\cdot\{1-F_{X_3}(t)\cdot[1-(1-F_{X_1}(t))\cdot(1-F_{X_2}(t))]\}=$$

$$=1-(1-F_X(t))\cdot\{(1-F_X(t)\cdot[1-(1-F_X(t))^2]\}$$

נשתמש ב- $q=P\{X_i>1\}=1-F_X(1)=0.27e^{-0.8}+0.595e^{-0.5}=0.4822$ ונקבל

$$P\{X_{AB}>1\}=1-F_{X_{AB}}(1)=(1-F_X(1))\cdot\{(1-F_X(1)\cdot[1-(1-F_X(1))^2]\}=$$

$$=q\cdot\{1-F_X(1)\cdot[1-q^2]\}=q\cdot\{1-(1-q)\cdot[1-q^2]\}=q\cdot[q+q^2-q^3]=0.2905$$

(ד) ההסתברות שנורה מתוצרת המפעל הנבחרת מקרית פגומה היא $p=P\{X=0\}=F_X(0)=1-0.27-0.595=0.135$.

אם S הוא מספר הנורות הפגומות בתוך 200 נורות שנבחרו, אז $S\sim B(n,p)$, כאשר $n=200, p=0.135$.

נשתמש בקירוב נורמלי למ"מ בינומי ונקבל

$$P\{S\le 25\}=P\left\{\frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{25-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}=P\left\{\frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{25-200\cdot 0.135}{\sqrt{200\cdot 0.135\cdot(1-0.135)}}\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{S-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le -0.41385\right\}\approx\Phi(-0.41385)=0.3395$$

5. אם X_i מסמן את זמן-החיים של הרחיב ה-i-י שמותקן במכשיר, אז $S_n=\sum_i^n X_i$ מייצג את הרגע שבו מתקלקל הרחיב ה-n-י שמותקן בכשיר. לכל i $E(X_i)=\int_0^1 2x^2dx=2/3$, $E(X_i^2)=\int_0^1 2x^3dx=1/2$, $V(X_i)=(1/2)-(2/3)^2=1/18$. מספר הרכיבים n שיש להחזיק במלאי, אם רוצים להיות בטוחים ב-90% שהמלאי יספיק ל-35 יום לפחות, חייב לקיים את אי-שוויון $P\{S_n\ge 35\}\ge 0.9$. לפי משפט הגבול המרכזי

$$P\{S_n\ge 35\}=P\left\{\frac{S_n-n\cdot 2/3}{\sqrt{n/18}}\ge\frac{35-n\cdot 2/3}{\sqrt{n/18}}\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{35-n\cdot 2/3}{\sqrt{n/18}}\right)\ge 0.9,$$

או $\Phi\left(\frac{35-n\cdot 2/3}{\sqrt{n/18}}\right)\le 0.1 \Leftrightarrow \frac{35-n\cdot 2/3}{\sqrt{n/18}}\le\Phi^{-1}(0.1)$. ומכאן, $\Phi^{-1}(0.1)=-1.282$

$\frac{35-n\cdot 2/3}{\sqrt{n/18}}\le -1.282 \Leftrightarrow (35-n\cdot 2/3)\le -1.282\sqrt{n/18}$.פותרים את היא-שוויון הריבועי

$(35-n\cdot 2/3)\le -1.282\sqrt{n/18}$ ונקבל $n\ge 56$.

6. נציין, כי אם מטילים כל n המטבעות פעמים כל אחת, אז מספר המטבעות שבהם יופיע עץ פעמיים הוא זהה למ"מ X. מכאן ברור ש- $X\sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$ ולכן $E(X)=n\cdot\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$.

7. (א)
$$P\{X=k,Y=l\}=\begin{cases}\left(\frac{3}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{l-k-1}\frac{2}{6} & , \quad k<l\\ \left(\frac{3}{6}\right)^{l-1}\cdot\frac{2}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-l-1}\frac{1}{6} & , \quad k>l\\ 0 & , \quad k=l\end{cases}$$

הסבר: כאשר $k<l$ המאורע $\{X=k,Y=l\}$ משמעו: היו $k-1$ הטלות שבהן לא יצא 2,4,6, ההטלה ה k-ית היא 6 , לאחר מכן יש $l-k-1$ הטלות שהן לא 2 ולא 4 ולבסוף בהטלת ה- l יצא 2 או 4. הסבר דומה יש למקרה $k>l$. ברור כי $P\{X=k,Y=k\}=0$ לכל $k=1,2,...$.

(ב) $P\{X+Y=4\}=P\{X=1,Y=3\}+P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{12}$

(ג) W הוא המשתנה שסופר את מספר ההטלות עד שלראשונה יתקבל מספר זוגי ולכן $W\sim G\left(\frac{1}{2}\right)$. ומכאן

$E(W)=\frac{1}{1/2}=2$, $V(W)=\frac{1-1/2}{(1/2)^2}=2$.