תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 1

1. מטילים קובייה ומטבע. (א) תאר את מרחב המדגם Ω. תאר את המאורעות הבאים: (ב) A_1 - "המספר על הקובייה זוגי", (ג) A_2 - " נקבל "עץ" על המטבע ", (ד) $A_3 = A_1 \cup A_2$, (ה) $A_4 = A_1 \cap A_2$ (ו) $\overline{A_3}$, $\overline{A_4}$. בהנחה שלכל אחת מהתוצאות הניסוי יש אותה הסתברות חשב את הסתברויות של המאורעות (ב)-(ו).
2. מטבע שעל צדדיו כתובים מספרים 0 ו-1 הוטל ארבע פעמים בזו אחר זו. (א) תאר את מרחב המדגם Ω. (ב) תאר את המאורעות הבאים: A_1 - "בהטלה הראשונה התקבל 0", A_2 - "בכל אחת משתי התוצאות הראשונות התקבל 1", A_3 - "סכום התוצאות של כל ההטלות הוא 3". A_4 - "בכל אחת משלוש התוצאות האחרונות התקבל 0". A_5 - "סכום התוצאות של כל ההטלות גדול מ-4". (ג) מצא את כל הזוגות של מאורעות זרים מבין המאורעות A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. (ד) בהנחה שהמטבע הוא סימטרי מצא את ההסתברויות של המאורעות $A_2 \cup A_3, A_1 \cap \overline{A_4}, A_1 \cap A_3$.
3. מטילים שתי קוביות סימטריות. תאר את מרחב המדגם Ω. מהי ההסתברות שסכום התוצאות הוא לכל היותר 4?
4. קופסה מס' 1 מכילה שני כדורים שחורים ושני כדורים אדומים. קופסה מס' 2 מכילה שלושה כדורים לבנים וכדור אחד שחור .קופסה מס' 3 מכילה כדור אחד שחור, אחד לבן ואחד אדום. בוחרים בקופסה אחת וא"כ מוציאים ממנה שני כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. (א) תאר את מרחב המדגם Ω בהתחשבות לעובדה שסדר הופעת הכדורים הוא חשוב. (ב) תאר את המאורעות הבאים: A_1 - "נקבל כדור שחור" , A_2-"הכדור השני לבן", $A_3 = A_1 \cap A_2$, A_4 - "שני הכדורים מאותו צבע", A_5 - "מספר הקופסה שווה למספר צבעים במדגם הכדורים". (ג) נניח שלכל קופסה יש אותו סיכוי להיבחר ולכל זוג סדור של כדורים מהקופסה הנבחרת יש אותה הסתברות להיבחר. חשב את ההסתברויות של המאורעות A_5, A_4, A_3, A_2, A_1.
5. קובייה נזרקת עד הופעה הראשונה של תוצאה "6". תאר את מרחב המדגם Ω.
6. נתונים 3 מאורעות A , B ו- C במרחב המדגם Ω . מתוך 3 המאורעות מצא ביטוי עבור כל אחד מהמאורעות הבאים: (א) קורה A בלבד. (ב) קורים A ו- B אך לא C. (ג) קורה לפחות אחד מהם. (ד) קורים לפחות שניים מהם. (ה) קורים כולם. (ו) לא קורה אף אחד מהם. (ז) קורה לכל היותר אחד מהם. (ח) קורים לכל היותר שנים מהם. (ט) קורים בדיוק שניים מהם.
7. מקופסה המכילה כדורים לבנים ושחורים נבחרו n כדורים אחד אחרי השני. נסמן ב- A_i את מאורע "הכדור ה- i לבן", $i = 1,2,...,n$. תאר ע"י שימוש בסימני איחוד, חיתוך ומשלים את המאורעות הבאים: (א) כל n הכדורים לבנים. (ב) לפחות כדור אחד לבן. (ג) בדיוק כדור אחד לבן. (ד) לפחות 2 כדורים לבנים . (ה) כל n הכדורים מאותו צבע.
8. הוכח: $P(A \bigcup B \bigcup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \bigcap B) - P(A \bigcap C) - P(B \bigcap C) + P(A \bigcap B \bigcap C)$
9. הוכח כי- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$.
10. יהי $\Omega = \{0,1,2,...\}$. ידוע כי $P(n)$ פרופורציוני ל- $(1/2)^n$. חשב את (א) ההסתברות ש"תוצאת הניסוי גדולה מ-4", (ב) ההסתברות ש"התוצאה היא אי-זוגית" .
11. אדם עובר בדרכו לעבודה 3 רמזורים. הסיכוי שלא יהיה אף רמזור אדום בדרך הוא 0.4, רמזור אדום אחד - 0.1, 2 רמזורים אדומים - 0.2. מרחב המדגם Ω מתאר את מספר הרמזורים האדומים בהם נתקל האדם. מה ההסתברות לכל אחד מהמאורעות הבאים: A - הוא נתקל בלפחות רמזור אדום אחד , B - לפחות רמזור ירוק אחד, C - מספר אי-זוגי של רמזורים ירוקים, D - לכל היותר רמזור ירוק אחד.
12. הוכח את אי-שוויון בול (Boole) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

תרגול 1. תשובות

1. $P(A_3) = \frac{3}{4}$, $P(\overline{A_4}) = \frac{3}{4}$ **2. (ד)** $\frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{3}{8}$ **3.** $\frac{1}{6}$ **4.(ג)** $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{13}{36}$, $P(A_3) = \frac{5}{36}$, $P(A_4) = P(A_5) = \frac{5}{18}$ **6.** (א) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, **(ח)** $\overline{A \cap B \cap C}$ **10.** (א) $\frac{1}{32}$ (ב) $\frac{1}{3}$ **11.** 0.5,0.6,0.7,0.6