תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 1. פתרונות

2. (א) מרחב המדגם $\Omega=\{\omega=(i_1,i_2,i_3,i_4)\,|\,i_k\in\{0,1\},k=1,2,3,4\}$.

(ב) $A_1=\{\omega=(0,i_2,i_3,i_4)\,|\,i_k\in\{0,1\},k=2,3,4\}$, $A_2=\{\omega=(1,1,i_3,i_4)\,|\,i_k\in\{0,1\},k=3,4\}$,
$A_3=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$, $A_4=\{(0,0,0,0),(1,0,0,0)\}$, $A_5=\varnothing$,

(ג) $A_1\cap A_2=A_2\cap A_4=A_3\cap A_4=\varnothing$ וגם כל החיתוכים עם A_5.

4. קופסה מס' 1 מכילה שני כדורים שחורים b_1',b_2' ושני כדורים אדומים r_1',r_2'; קופסה מס' 2 מכילה שלושה כדורים לבנים w_1'',w_2'',w_3'' וכדור אחד שחור b''. קופסה מס' 3 מכילה כדור אחד שחור b''', אחד לבן w''' ואחד אדום r'''.

(א) כל תוצאת הניסוי ω היא זוג סדור $\omega=(k_1,k_2)$ של כדורים שונים k_1,k_2 מאותה קופסה ומרחב המדגם Ω הוא אוסף כל הזוגות כאלה: $\Omega=\{\omega=(k_1,k_2)\,|\,k_1\neq k_2;\ \text{כדורים } k_1,k_1 \text{ מאותה קופסה}\}$.

Ω מתחלק לשלוש תת-קבוצות $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$, כאשר קבוצה Ω_i מכילה כל הזוגות $\omega=(k_1,k_2)$ מקופסה i $(i=1,2,3)$. $|\Omega_1|=|\Omega_2|=4\cdot3=12$, $|\Omega_3|=3\cdot2=6$, $|\Omega|=12+12+6=30$.

(ב) המאורע A_1 מורכב מכל הזוגות ב-Ω_1 חוץ משני זוגות $(r_1',r_2'),(r_2',r_1')$ שמספרם $12-2=10$, מ-6 זוגות ב-Ω_2 עם כדור b'' במקום הראשון או השני, וגם מ-4 זוגות ב-Ω_3 עם כדור b''' במקום הראשון או השני.

המאורע A_2 מורכב מכל הזוגות ב-Ω_2 חוץ מ-3 זוגות עם כדור b'' במקום השני, שמספרם $12-3=9$ ומ-2 זוגות ב-Ω_3 עם כדור w''' במקום השני.

המאורע A_3 מורכב מ-3 זוגות ב-Ω_2 עם כדור b'' במקום הראשון ומזוג (b''',w''') ב-Ω_3.

המאורע A_4 מורכב מ-4 זוגות ב-Ω_1, מ-6 זוגות ב-Ω_2.

המאורע A_5 מורכב מ-4 זוגות כדורים ב-Ω_1 מאותו צבע, מ-6 זוגות כדורים ב-Ω_2 מצבעים שונים.

(ג) לפי ההנחה הראשונה $P(\Omega_1)=P(\Omega_2)=P(\Omega_3)=\frac{1}{3}$. לפי ההנחה השנייה לכל 12 זוגות ω ב-Ω_1 יש הסתברויות שוות, לכן $P(\omega)=\frac{1/3}{12}=\frac{1}{36}$ עבור $\omega\in\Omega_1$. באופן דומה $P(\omega)=\frac{1/3}{12}=\frac{1}{36}$ עבור $\omega\in\Omega_2$, ו-$P(\omega)=\frac{1/3}{6}=\frac{1}{18}$ עבור $\omega\in\Omega_3$. מכאן ומ-**(ב)** (A_1 מורכב מ-10 הזוגות ב-Ω_1, מ-6 זוגות ב-Ω_2 ומ-4 זוגות ב-Ω_3) נקבל $P(A_1)=10\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{1}{36}+4\cdot\frac{1}{18}=\frac{2}{3}$. באופן דומה $P(A_2)=9\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}=\frac{13}{36}$, $P(A_3)=3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{18}=\frac{5}{36}$, $P(A_4)=4\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$, $P(A_5)=5\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$.

5. $\Omega=\{6,(j_1,6),(j_1,j_2,6),...(j_1,j_2,,,j_k,6),...\}$, כאשר $j_k\in\{1,2,3,.4,5\}$ לכל k

(קיימת אפשרות שהניסוי לא יגמר, ז"א שנקבל סדרות אינסופיות מן הצורה $(j_1,j_2,,,j_k,...)$, $j_k\in\{1,2,3,.4,5\}$ לכל k. אנו נראה שההסתברות של האפשרות האחרונה היא אפס).

6. (א) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ (ב) $A\cap B\cap\overline{C}$ (ג) $A\cup B\cup C$ (ד) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

(ה) $A\cap B\cap C$ (ו) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ (ז) $\overline{(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)}$

(ח) $\overline{A\cap B\cap C}$ (ט) $(A\cap B\cap\overline{C})\cup(B\cap C\cap\overline{A})\cup(C\cap A\cap\overline{B})$.

7. (א) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, (ב) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, (ג) $\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap\bigcap_{j\neq i}\overline{A_j}\right)$, (ד) $\bigcup_{1\le i_1<i_2\le n}\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)$, (ה) $\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i}^{N}\overline{A_i}\right)$.

8.

$$\begin{aligned}
P(A\bigcup B\bigcup C) &= P((A\bigcup B)\bigcup C) = P(A\bigcup B)+P(C)-P((A\bigcup B)\bigcap C) = \\
&= P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)+P(C)-P((A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)) = \\
&= P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)+P(C)-[P(A\bigcap C)+P(B\bigcap C))-P((A\bigcap C)\bigcap(B\bigcap C))] = \\
&= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\bigcap B)-P(A\bigcap C)-P(B\bigcap C)+P(A\bigcap B\bigcap C)
\end{aligned}$$

9. $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$.

10. $P(n)=c\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$. $\sum_{i=n}^{\infty}P(n)=1 \quad\Leftarrow\quad c\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2 \Leftarrow c=\frac{1}{2} \Leftarrow$

$P(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. (א) $A=$"תוצאת הניסוי גדולה מ-4"$=\{5,6,7,...\}$. $\overline{A}=\{0,1,2,3,4\}$.

$$\Leftarrow P(\overline{A}) = P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{31}{32}=\frac{1}{32}$. (ב) $B=\{1,3,5,...\}$. $P(B)=\sum_{k=0}^{\infty}P(2k+1)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

11. $\Omega=\{0,1,2,3\}$, $P(3)=1-P(0)-P(1)-P(2)=1-0.4-0.1-0.2=0.3$. $P(A)=1-P(0)=0.6$, $P(B)=1-P(3)=1-0.3=0.7$, $P(C)=P(0)+P(2)=0.4+0.2=0.6$, $P(D)=P(2)+P(3)=0.2+0.3=0.5$.

12. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i = A_1\bigcup\left(A_2\setminus A_1\right)\bigcup\left(A_3\setminus\left(A_1\bigcup A_2\right)\right)\bigcup\ldots\bigcup\left(A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)$, כאשר בצד ימין האחוד n מאורעות

$A_1,\left(A_2\setminus A_1\right),\left(A_3\setminus\left(A_1\bigcup A_2\right)\right),\ldots,\left(A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)$ זרים בזוגות ולכן

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right) = P(A_1)+P(A_2\setminus A_1)+P(A_3\setminus\left(A_1\bigcup A_2\right))+\ldots+P\left(A_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)\le$$

$$\le P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\ldots+P\left(A_n\right).$$