תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 2. פתרונות

1. מרחב המדגם $\Omega=\{\omega=(x_1,x_2,...x_5)\,|\,x_k=a,b,c;k=1,2,...,5\}$ (x_k - קופסה המכילה כדור k) הוא אוסף כל החמישיות הסדורות של האותיות a,b,c, $|\Omega|=3^5$. מרחב ההסתברות סימטרי: לכל ω $P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{1}{3^5}$. המאורע A_1 מורכב מכל חמישיות ω שבהן יש רק האותיות b,c, $|A_1|=2^5$, $P(A_1)=\frac{|A_1|}{|\Omega|}=\frac{2^5}{3^5}\approx 0.13$. $A_2=A_1\setminus\{(b,b,...,b),(c,c,...,c)\}$, $|A_2|=2^5-2$ $P(A_2)=\frac{2^5-2}{3^5}\approx 0.12$.
מאורע A_3 הוא האיחוד של שלושת המאורעות הזרים: A_2-"רק קופסה a ריקה", "רק קופסה b ריקה" ו- "רק קופסה c ריקה". ברור שההסתברויות שלהם שוות, לכן $P(A_3)=3P(A_2)\approx 0.37$. מאורע A_4 הוא האיחוד של שני מאורעות זרים: המאורע A_3 והמאורע "בדיוק שני קופסאות ריקות", לכן $P(A_4)=P(A_3)+\frac{3}{3^5}\approx 0.38$. $\overline{A_5}=A_4 \Leftarrow P(A_5)=1-P(A_4)$. $A_6=A_1\cup A_1'$, כאשר "קופסה b ריקה" $=A_1'$, מכאן $P(A_6)=P(A_1)+P(A_1')-P(A_1\cap A_1')=2P(A_1)-\frac{1}{3^5}$, כי $|A_1\cap A_1'|=1$.

2. Ω - אוסף כל התמורות של הספרות $1,2,...,5$, $|\Omega|=5!$. הביטוי "מונחים באופן מקרי" אומר שמרחב ההסתברות הוא סימטרי . $P(A_1)=\frac{|A_1|}{|\Omega|}=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5}$. אם בתמורה שבה "קלף ה-2 נמצא אחרי קלף ה-3" להחליף 2 ו-3 נקבל תמורה שבה "קלף ה-3 נמצא אחרי קלף ה-2". לכן $|A_2|=|\overline{A_2}| \Leftarrow P(A_2)=P(\overline{A_2})=\frac{1}{2}$. $\overline{A_3}=$"קלף ה-1 נמצא במקום הראשון" $\cup$ "קלף ה-2 נמצא במקום השני". לכן $P(\overline{A_3})=\frac{4!}{5!}+\frac{4!}{5!}-\frac{3!}{5!}=\frac{7}{20}$, $P(A_3)=\frac{13}{20}$. $|A_4|=\binom{5}{3}=10 \Leftarrow P(A_4)=\frac{10}{5!}=\frac{1}{12}$.

3. Ω - אוסף כל העשיריות סדורות של 15 הקלפים, $|\Omega|=15^{10}$. מרחב ההסתברות סימטרי.
A - "כל הקלפים הנבחרים שונים", $|A|=(15)_{10}=15\cdot 14\cdot\ldots\cdot 11$,
$P(A)=\frac{(15)_{10}}{15^{10}}$. ($(n)_k=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$)

4. Ω - אוסף כל הסידורים של N אנשים בשורה, $|\Omega|=N!$. מרחב ההסתברות סימטרי. A - "בין אברהם ויצחק יפרידו בדיוק R אנשים" . $|A|=2\cdot(N-2)_R\cdot(N-R-1)!$ (2 אפשרויות לסדר אברהם ויצחק בשורה, $(N-2)_R$ אפשרויות לבחור R אנשים מתוך $(N-2)$ שישבו ביניהם עם סדר וללא החזרה ו- $(N-R-1)!$ אפשרויות לסדר בשורה $N-R-2$ אנשים נותרים + בלוק של האנשים שבין אברהם ויצחק כולל אברהם ויצחק עצמם) $P(A)=\frac{2(N-2)!(N-R-1)!}{(N-2-R)!N!}=\frac{2(N-R-1)}{N(N-1)}$.

5. Ω - אוסף כל תת-הקבוצות בגודל 4 (רביעיות ללא סדר וללא החזרה) מתוך 10 הכדורים , $|\Omega|=\binom{10}{4}$.
מרחב ההסתברות סימטרי. A - "במדגם נמצאים לפחות שני כדורים שחורים" , A - האיחוד של שני

המאורות זרים: "במדגם נמצאים בדיוק שני כדורים שחורים" ו- "במדגם נמצאים בדיוק שלושה כדורים שחורים",לכן $|A|=\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{7}{1}$, $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{3}$.

6. Ω - אוסף כל תת-הקבוצות בגודל 4 מתוך 20 הנעלים. $|\Omega|=\binom{20}{4}$. מרחב ההסתברות סימטרי.

$|A_1|=\binom{10}{1}\cdot\frac{18\cdot16}{2}$, $P(A_1)=\frac{|A_1|}{|\Omega|}=\frac{96}{323}$. $|A_2|=\binom{10}{2}$, $P(A_2)=\frac{3}{323}$. $|A_3|=\frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{4!}$, $P(A_3)=\frac{224}{323}$.

7. $P(A)=\binom{2n}{n}\cdot\binom{2n}{n}\Big/\binom{4n}{2n}$.

8. $\Omega=\{\omega=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_{2n})\,|\,\varepsilon_k=0,1,k=1,2,...,2n\}$, כאשר 1 - "עץ", 0 – "מספר". $|\Omega|=2^{2n}=4^n$.
A - "אחרי $2n$ הטלות לשחקן יהיה אותו סכום" = "יתקבלו n פעמים "עץ" ו- n פעמים "מספר",
$|A|=\binom{2n}{n}$ (בוחרים n הטלות מתוך $2n$ שבהן יתקבל "עץ") ו- $P(A)=\binom{2n}{n}\Big/4^n$.

9. $\Omega=\{\omega=(j_1,j_2,...,j_{36})\,|\,j_k=1,2,...,6,k=1,2,...,36\}$, $|\Omega|=6^{36}$. מרחב ההסתברות סימטרי.
A - "לקבל כל תוצאה 6 פעמים" $\Leftrightarrow$ " לחלק 36 ההטלות ל- 6 קבוצות עם 6 איברים בכל אחת מהן: בקבוצה מס' 1 יהיו 6 הטלות עם התוצאה 1, בקבוצה מס' 2 יהיו 6 הטלות עם התוצאה 2, ... , בקבוצה מס' 6 יהיו 6 הטלות עם התוצאה 6 " , לכן $|A|=\frac{36!}{6!\cdot6!\cdot...\cdot6!}=\frac{36!}{(6!)^6}$, $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

11. מרחב המדגם Ω הוא אוסף כל ה- k-יות $\omega=(j_1,j_2,...,j_k)$, כאשר j_m - יום הולדת של התלמיד ה- m-י. ($m=1,2,...,k$, $j_m=1,2,...,365$). $|\Omega|=365^k$ (מניחים שבכל שנה יש 365 ימים). המאורע C -"יש בכיתה לפחות שני תלמידים שיום הולדתם חל באותו תאריך" הוא אוסף כל ה- k-יות $\omega=(j_1,j_2,...,j_k)$ שבהן לפחות שתי קואורדינאטות j_m שוות. $\overline{C}$ - "כל ה- k-יות $\omega=(j_1,j_2,...,j_k)$ שבהן כל הקואורדינאטות j_m שונות זו מזו". מכאן $|\overline{C}|=(365)_k=(365)_{30}$, $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{(365)_k}{365^{30}}$. עבור $k=20$ $P(C)=0.411$, עבור $k=30$ $P(C)=0.706$ (עבור $k=50$ $P(C)=0.970$).

12. נניח שהמפתחות ממוספרים מ-1 עד ל- n ומפתח מס' 1 פותח את הדלת. (א) (דגימה עם סדר וללא החזרה) מרחב המדגם Ω_1 המתאים לניסוי האקראי הוא אוסף כל ה- k-יות $e=(j_1,j_2,...,j_k)$, כאשר j_m - מספר המפתח בפעם ה- m-ית, $j_m\in1,2,...,n$ ($m=1,2,...,k$) וכל "מפתחות" $j_1,j_2,...,j_k$ שונים זה מזה. לכן $|\Omega_1|=(n)_k$. למאורע A (הוא יצליח בפעם ה-k-ית) שייכות כל ה- k-יות מן הצורה $e=(j_1,j_2,...,j_{k-1},1)$ כאשר, $j_m\in\{2,3,...,n\}$ לכל $m=1,2,...,k-1$. $|A|=(n-1)_{k-1}$, $P(A)=\frac{(n-1)_{k-1}}{(n)_k}=\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)}=\frac{1}{n}$. (ב) (דגימה עם סדר ועם החזרה) מרחב המדגם Ω_2 המתאים הוא אוסף כל ה- k-יות $e=(j_1,j_2,...,j_k)$, כאשר j_m - מספר המפתח בפעם ה- m-ית, $j_m\in1,2,...,n$, $m=1,2,...,k$ (ועכשיו בלי שום הגבלה נוספת) ולכן $|\Omega_2|=n^k$. למאורע B - "הוא יצליח בפעם ה-k-ית" שייכות כל ה- k-יות בצורה $e=(j_1,j_2,...,j_{k-1},1)$, כאשר $j_m=2,3,...,n$ לכל $m=1,2,...,k-1$. $\Leftarrow$ $|B|=(n-1)^{k-1}$, $P(B)=\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$. ($P(B)<P(A)$ לכל k).