תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 6

.1 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. (א) מצא את C כך ש- $P(X \le C) = 0.9$, (ב) מצא את C כך ש- $P(|X-\mu| \le C) = 0.9$, (ג) מצא את $P(9 < X < 12)$ כאשר $X \sim N(10,36)$.

.2 מכונה אוטומטית מייצרת כדורי אספירין אשר משקלם $X \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 0.1)$ גרם. מכונה אחרת מסווגת את התוצרת לשלוש קבוצות. כדורים בעלי משקל קטן מ-0.95 גרם הולכים לקבוצה A; כדורים בעלי משקל בין 0.95 ל-1.05 גרם הולכים לקבוצה B; כדורים בעלי משקל גדול מ-1.05 גרם הולכים לקבוצה C. כדור אחד נלקח מקבוצה B, נסמן את משקלו ב- Y . מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

.3 יהיה $X \sim Exp(\lambda)$ ויהיה $Y = X^3$ מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

.4 יהיה X מ"מ רציף בעל פונקציית צפיפות $f(x)$. $Y = \operatorname{sgn}(X) \equiv \begin{cases} 1, & X > 0 \\ 0 & X = 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases}$. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ Y.

.5 אורך חיים של נורת רחוב $X \sim N(1000,40000)$ שעות. מצא את ההסתברות שלפחות 4 מתוך 1000 נרות ימשיכו להאיר לאחר 1600 שעות עבודה.

.6 יהיה $X \sim Exp(\lambda)$ ויהיה $Y = 1/(1-X)$. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

.7 מ"מ X בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x) = 2xe^{-x^2}$, $x \ge 0$ ו-0 אחרת. יהיה $Y = X^2$. מצא את פונקציית הצפיפות של מ"מ Y.

.8 יהיה $X \sim U(0,1)$. מצא את פונקציות הצפיפות של משתנים מקרים הבאים: (א) $Y = 4\pi(X - 0.5)$ (ב) $Z = \tan(Y)$ (ג) $W = a + bX$.

.9 יהיה $X \sim Exp(\lambda)$. מצא את $P(\sin X > 0)$.

.10 נקודה נזרקת באופן מקרי על הקטע $[0,1]$. X הוא מ"מ המוגדר כמרחק הנקודה מ-0. בהתאם להסכם מסוים דולר אחד ישולם אם $X > 0.5$ ו- X דולר ישולם אם $X \le 0.5$. נסמן ב- Y את התשלום ששולם כתוצאה מהניסוי. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של מ"מ Y.

.11 רמזור מראה ירוק במשך דקה אחת ואדום במשך דקה אחת. מכונית מגיעה באופן מקרי לרמזור. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של זמן ההמתנה ברמזור.

.12 $X \sim Exp(\lambda)$. מצא את פונקציית ההסתברות של מ"מ בדיד $Y = [X]$ ($[X]$ - הערך השלם של X)

תרגול 6. תשובות

.1 (א) $\mu + 1.28\sigma$ (ב) 1.645σ (ג) 0.197 **.2** $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{25.19}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{0.2}}, & y \in [0.95, 1.05] \\ 0, & y \notin [0.95, 1.05] \end{cases}$ **.3**

$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{3} t^{-2/3} e^{-\lambda\sqrt[3]{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$ **.4** $F_Y(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_{-\infty}^{0} f(x)dx, & -1 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$ **.5** 0.043 **.6** $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t^2} e^{\frac{\lambda}{t} - \lambda}, & t \notin [0,1] \\ 0, & t \in [0,1] \end{cases}$

.7 $f_Y(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ **.8** (א) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & y \in [-2\pi, -2\pi] \\ 0, & y \notin [-2\pi, -2\pi] \end{cases}$ **:** $Y \sim U(-2\pi, 2\pi)$ (ב) $f_Z(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$

(ג) אם $b > 0$, $W \sim U(a, a+b)$ **,** ואם $b < 0$, $W \sim U(a+b, a)$ **.9** $\frac{1}{1+e^{-\lambda\pi}}$ **.10** $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \le t < 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$

.11 $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t+1}{2}, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$ **12** $f_Y(k) = P\{Y = k\} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k}, k = 0,1,2,...$