תורת הסתברות 1

201-10131

תרגול 8. פתרונות

2. יהיו X (מ"מ) סכום שיקבל אברהם ו- Y (מ"מ) סכום שיקבל יצחק. $P\{X=k\}=\frac{1}{N}$ לכל $k=1,2,\ldots,N$.

$P\{Y=k\}=\frac{(N-1)\cdot 1}{N(N-1)}=\frac{1}{N}$ לכל $k=1,2,\ldots,N$. $P\{X=k\}=P\{Y=k\}$ לכל $k=1,2,\ldots,N$ $\Leftarrow$ $E(X)=E(Y)$.

3. הניסוח הנכון של השאלה:

כל אחת מ- n חיות יכולה לחלות בהסתברות p ללא תלות בחיות האחרות. כדי לגלות את החיה החולה נעשה ניסיון בצורה הבאה: בשלב הראשון נלקח מדגם דם מכל חיה, כל המדגמים מעורבים יחד בכלי אחד והמדגם המעורב נבדק. אם לא נגלה מחלה, מפסיקים את הניסוי. אם מחלה תתגלה, אז מכל חיה שוב לוקחים מדגם דם ובודקים אחד אחד. מהו המספר הממוצע של בדיקות דם?

יהיו X (מ"מ) מספר בדיקות דם. $P\{X=1\}=(1-p)^n$, $P\{X=n+1\}=1-(1-p)^n$.

$E(X)=1\cdot(1-p)^n+(n+1)\cdot(1-(1-p)^n)=n+1-n(1-p)^n$.

5. נזכיר כי אם $Y\sim Exp(\lambda)$, אז $f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda y}$, כאשר $y\geq 0$ ו- $f_Y(y)=0$, כאשר $y<0$. $E(Y)=\frac{1}{\lambda}, V(Y)=\frac{1}{\lambda^2}$.

$f_X(x)=2a\cdot e^{-x}+\frac{3a}{2}\cdot 2e^{-2x}$, $x\geq 0$. $\Leftarrow$ $f_X(x)=2a\cdot f_{X1}(x)+\frac{3a}{2}\cdot f_{X2}(x)$, כאשר $X_1\sim Exp(1)$

ו- $X_2\sim Exp(1)$. כלומר, ניתן להציג את מ"מ X כ"תערובת" של שני מ"מים מעריכיים X_1 ו- X_2. $\Leftarrow$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=2a\int_{-\infty}^{\infty}f_{X1}(x)dx+\frac{3a}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X2}(x)dx=2a\cdot 1+\frac{3a}{2}\cdot 1=\frac{7a}{2} \Leftarrow a=\frac{2}{7}.$$

מציבים את $a=\frac{2}{7}$ ומקבלים: $f_X(x)=\frac{4}{7}\cdot f_{X1}(x)+\frac{6}{14}\cdot f_{X2}(x)$: ז"א כי מ"מ X הוא תערובת של שני מ"מים X_1 ו- X_2 עם משקלים $p_1=\frac{4}{7}, p_2=\frac{6}{14}$ ו- $p_1+p_2=1$. $\Leftarrow$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\frac{4}{7}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X1}(x)dx+\frac{6}{14}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X2}(x)dx=\frac{4}{7}E(X_1)+\frac{6}{14}E(X_2)=\frac{4}{7}\cdot 1+\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{14},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_X(x)dx=\frac{4}{7}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_{X1}(x)dx+\frac{6}{14}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_{X2}(x)dx=\frac{4}{7}E(X_1{}^2)+\frac{6}{14}E(X_2{}^2)$$

אם $Y\sim Exp(\lambda)$, אז $E(Y^2)=V(Y)+[E(Y)]^2=\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}$. $\Leftarrow$ $E(X^2)=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{1^2}+\frac{6}{14}\cdot\frac{2}{2^2}=\frac{19}{14}$

$$\Leftarrow V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{19}{14}-\left(\frac{11}{14}\right)^2=\frac{145}{196}.$$

6. נזכיר כי אם $Y\sim N(a,\sigma^2)$, אז $f_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$. ניתן להציג את מ"מ X כתערובת של שני מ"מים נורמליים X_1 ו- X_2:

$$f(x)=2ae^{-x^2}+3ae^{-2x^2}=2a\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}+\frac{3a\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=2a\sqrt{\pi}\cdot f_{X1}(x)+\frac{3a\sqrt{2\pi}}{2}\cdot f_{X2}(x)$$

כאשר $\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, X_1\sim N(0,\sigma_1^2)$ ו- $\sigma_2=\frac{1}{2}, X_2\sim N(0,\sigma_2^2)$. מכאן, כמו בפתרון השאלה 5,

$1=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=2a\sqrt{\pi}+\frac{3a\sqrt{2\pi}}{2} \Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{\pi}(4+3\sqrt{2})}\approx 0.137$. $E(X)=0$, כי הפונקציה $f_X(x)$ זוגית.

$$V(X)=E(X^2)=2a\sqrt{\pi}\cdot E(X_1^{\ 2})+\frac{3a\sqrt{2\pi}}{2}\cdot E(X_2^{\ 2})=2a\sqrt{\pi}\cdot\sigma_1^2+\frac{3a\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\sigma_2^2=$$

$$=2a\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3a\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\frac{1}{4}=a\sqrt{\pi}\cdot\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)\approx 0.37$$

7. $E(X)=\int_{-\infty}^{0}F(t)dt+\int_{0}^{\infty}(1-F(t))dt$ (א) $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t<0.5\\ 0.5 & 0.5\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$

(ב) $E(X)=\int_0^\infty(1-F(t))dt=\int_0^{0.5}(1-t)dt+\int_{0.5}^{1}(1-0.5)dt=\frac{5}{8}$, $F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{t+1}{2}, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$, $E(X)=\int_0^1\left(1-\frac{t+1}{2}\right)dt=\frac{1}{4}$

8. יהי X (מ"מ) גובה של בן אדם, $X\sim N(170,10^2)$. ההסתפרות שיעבור אדם בעל גובה העולה על 190 ס"מ היא $p=P(X>190)=P\left(\frac{X-170}{10}>\frac{190-170}{10}\right)=P(Z>2)=1-\Phi(2)=1-0.97725=0.02275$. יהי Y מספר האנשים שיעברו עד אשר יעבור אדם בעל גובה העולה על 190 ס"מ כולל אדם אחרון. Y הוא מ"מ גיאומטרי עם פרמטר p, $Y\sim G(p)$ ו- $E(Y)=\frac{1}{p}$. מספר הממוצע של האנשים אשר יעברו על פני המשגיח עד אשר יעבור אדם בעל גובה העולה על 190 ס"מ (לא כולל אדם אחרון) הוא מ"מ $Y-1$.

$E(Y-1)=E(Y)-E(1)=E(Y)-1=\frac{1}{p}-1=\frac{1}{0.02275}-1\approx 43$.

9. (א). $F_{X_{AB}}(t)=\begin{cases}0, & t<1\\ (1-e^{-2t})^2, & t\ge 1\end{cases}$, $E(X_{AB})=\int_0^\infty(1-F_{AB}(t))dt=\int_0^1 1dt+\int_1^\infty(1-(1-e^{-2t})^2)dt=1+e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-4}$.

(ב) $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t/2 & 0\le t<1\\ 3/4 & 1\le t<2\\ 1 & t\ge 2\end{cases}$ $F_Z(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sqrt{t}/2 & 0\le t<1\\ 3/4 & 1\le t<4\\ 1 & t\ge 4\end{cases}$ $E(Y)=\int_0^\infty(1-F_Y(t))dt=\int_0^1\left(1-\frac{t}{2}\right)dt+\int_1^2\left(1-\frac{3}{4}\right)dt=1$

$E(Z)=\int_0^\infty(1-F_Z(t))dt=\int_0^1\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)dt+\int_1^2\left(1-\frac{3}{4}\right)dt=\frac{17}{12}$. $Z=Y^2 \Rightarrow V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(Z)-[E(Y)]^2=\frac{5}{12}$

10. (א) יהי X_{CB} זמן החיים של המערכת CB, אז (כמו בתרגיל 7, שאלה 4) $F_{X_{CB}}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ (1-e^{-2t})^2, & t\ge 0\end{cases}$.

$X_{AB}=\min(X_{CB},1) \Rightarrow F_{X_{AB}}(t)=\begin{cases}F_{X_{CB}}(t), & t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases} \Rightarrow F_{X_{AB}}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ (1-e^{-2t})^2, & 0\le t<1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$.

(ב) $E(X_{AB})=\int_0^\infty(1-F_{AB}(t))dt=\int_0^1(1-(1-e^{-2t})^2)dt=\frac{e^{-4}}{4}-e^{-2}+\frac{3}{4}$