# UNE DÉMONSTRATION "ÉLÉMENTAIRE" DU GROUPE DE MUMFORD-TATE D'UNE COURBE ELLIPTIQUE À $\tau$ TRANSCENDANT

DAVID CORWIN

Abstract. Dans l'examen final du cours du Prof. Daniel Bertrand sur les variétés abéliennes dans le programme M2 à Jussieu, on avait proposé de montrer que le groupe de Mumford-Tate d'une courbe elliptique de la forme $\mathbb{C}/ < 1, \tau >$ où $\tau$ est nombre transcendant, est égal à $\mathrm{GL}_2$. La solution proposée admettait la classification des groupes réductifs. Ici, on donne une preuve plus élémentaire de cet énoncé.

En effet, l'inspiration pour cette preuve provient de la preuve que pour une courbe elliptique $E$ de type CM, $j(E)$ est algébrique.

**Théorème.** *Soit $\tau = iy$ où $y$ est nombre réel transcendant. Alors, le groupe de Mumford-Tate de la courbe elliptique $\mathbb{C}/ < 1, \tau >$ est $GL_2$.*

On peut écrire la matrice de $i$ dans la base $\{1, iy\}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -y \\ \frac{1}{y} & y \end{pmatrix}$$

et ainsi tout nombre complexe $a + bi$ s'écrit comme

$$\begin{pmatrix} a & -by \\ \frac{b}{y} & a \end{pmatrix}$$

On sait que groupe de Mumford-Tate, noté $G$, est un sous-groupe algebrique de $\mathrm{GL}_2$ défini sur $\mathbb{Q}$ qui contient toutes ces matrices (et si $K$ est un corps qui contient $\mathbb{Q}$, alors $G(K)$ contient les matrices d'au-dessus avec $a, b \in K$). On voudrait regarder le cas où $K = \mathbb{C}$. Donc $G$ est défini sur $\mathbb{Q}$, et ses $\mathbb{C}$-points contiennent toute matrice de la forme au-dessus avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Parce que $G$ est défini sur $\mathbb{Q}$, toute automorphisme de $\mathbb{C}$ envoie $G$ sur lui-même. Pour tout $\tau, \tau'$ dans $\mathbb{C}$ transcendant sur $\mathbb{Q}$, il existe un automorphisme de $\mathbb{C}$ qui envoie $\tau$ sur $\tau'$ (car $\mathbb{C}$ est, comme corps abstrait, la clôture algébrique du corps de fonctions rationnelles en un nombre indénombrable de variables). Donc, on peut supposer $y$ n'importe quel nombre complexe transcendant sur $\mathbb{Q}$ (c'est vrai qu'un automorphisme peut modifier aussi $a$ et $b$, mais on aurait pu choisir n'importe quels nombres complexes $a, b$ tel que au moins un des deux ne s'annule pas).

De plus, car un fermé de Zariski est aussi fermé dans la topologie complexe, et les nombres transcendents sur $\mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{Q}$, alors $G$ contient les matrices sous la forme au-dessus, où $y$ peut être égal à n'importe quel nombre complexe ! (Notons qu'on parle de la notion d'un fermé dans l'espace topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Il faut éviter $y = 0$ car là la matrice peut ne pas être inversible.)

Il faut maintenant simplement montrer que ces matrices engendrent $\mathrm{GL}_2$ comme groupe abstrait. Supposons qu'on a une matrice $M$ égal à

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix}$$

quelconque dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Choisi $a, b$ tel que $a(u - x) = b(v + w)$ et au moins un d'entre $a, b$ n'est pas nul. Alors, le produit de

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $M$ est égal à

$$\begin{pmatrix} au - bw & av - bx \\ bu + aw & bv + ax \end{pmatrix}$$

Puis, soit $a' = au - bw = bv + ax$, et soit $b', y$ tel que $-b'y = av - bx$, et $\frac{b'}{y} = bu + aw$. Ceci marche sauf si exactement un d'entre $av - bx, bu + aw$ est nul. Mais les matrices qui sont de cette forme (et qui sont aussi inversible!) sont aussi dans $G$ car $G$ est fermé. On a donc montré que toute matrice dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est dans $G(\mathbb{C})$, donc $G = \mathrm{GL}_2$.