

## תרגיל 1 בתורת השדות ותורת גלואה

(1) יהא  $F$  שדה בן  $n$  איברים. הוכיחו כי  $n$  חזקה של מספר ראשוני.

(2) יהא  $F$  שדה ויהא  $R$  תחום שלמות עם שדה מנות  $E$ . יהא  $f: R \rightarrow F$  הומומורפיזם חוגים חח"ע. הוכיחו כי ניתן להרחיב את  $f$  בצורה יחידה להומומורפיזם  $g: E \rightarrow F$ .

(3) (א) האם  $X^3 - 7X - 1$  פריק מעל  $\mathbb{Q}$  ?

(ב) האם  $X^4 + 4$  פריק מעל  $\mathbb{Q}$  ?

(ג) האם  $X^3 - 9$  פריק מעל  $\mathbb{F}_{11}$  ?

(ד) האם  $X^2 + t^2 - 1$  פריק מעל  $\mathbb{C}(t)$  ?

(ה)\* האם  $X^2 + t^2 - 1$  פריק מעל  $\mathbb{C}((t))$  ?

(4\*) מצאו פולינום  $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$   $0 \neq f(X)$  ממעלה 3 שעבורו  $f(\cos 2\pi/7) = 0$ .

(5) יהא  $F$  שדה עם  $\text{Char } F = p > 0$ . נגדיר פונקציה  $f: F \rightarrow F$  ע"י  $f(x) = x^p$ .  
(א) הוכיחו ש- $f$  הינה הומומורפיזם חוגים.

(ב) הוכיחו של- $F$  סופי ול- $n$  טבעי, הפונקציה  $g: F \rightarrow F$  המוגדרת ע"י  $g(x) = x^{p^n}$  הינה איזומורפיזם של  $F$  עם עצמו.

(6) הכלילו את הלמה של Gauss ואת קריטריון Eisenstein לפולינומים מעל חוג פריקות יחידה כלשהו (= "חוג גאוס").