

## תרגיל 3 בתורת השדות ותורת גלואה

(1) בנו בעזרת סרגל ומחוגה קטעים באורכים הבאים:  
(א)  $1/3$ ; (ב)  $1 + \sqrt{2}$ ; (ג)  $\sqrt[4]{2}$ .

(2) (א) הוכיחו כי  $\sin \pi/5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ .

(ב) הסיקו כי  $\sin \pi/5$  בני.

(ג) הסיקו כי ניתן לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה מחומש משוכלל.

(ד) בדקו כי ניתן לבנות מחומש משוכלל באופן המפורש הבא:

- על שפת מעגל ברדיוס 1 סביב  $O$  נבחר נקודה שרירותית  $A$ .
- יהא  $\overline{BB'}$  קוטר של המעגל הניצב ל- $\overline{OA}$ .
- תהא  $C$  נקודת האמצע של הקטע  $\overline{OB}$ .
- תהא  $D$  הנקודה על  $\overline{OB'}$  שמרחקה מ- $C$  שווה למרחק  $A$  מ- $C$ .
- תהא  $E$  נקודה על המעגל שמרחקה מ- $A$  שווה למרחק  $D$  מ- $A$ .
- אזי הקטע  $\overline{AE}$  הינו צלע של מחומש משוכלל הכלוא במעגל זה.

(3) (א) הראו כי  $\text{irr}(\cos \pi/9, \mathbb{Q}) = 8X^3 - 6X - 1$ .

(ב) הסיקו כי לא ניתן לבנות בסרגל ומחוגה מצולע משוכלל בן תשע צלעות.

(4) הוכיחו כי ניתן לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה מצולע משוכלל בן 15 צלעות.

(5) פתרון גאומטרי של משוואות רבועיות:

נניח כי נתונות לנו הנקודות  $(b, 0)$ ,  $(c, 0)$ , כאשר  $0 < b, c$  ממשיים. נבצע את הבניה הבאה:

- נשרטט מעגל  $C$  ברדיוס  $b/2$  סביב  $(b/2, 0)$ .
- נמצא את הנקודה  $(0, \sqrt{c})$ .
- נשרטט דרכה ניצב  $L$  לציר ה- $Y$ .
- דרך כל אחת מנקודות החיתוך של  $L$  ו- $C$  נוריד אנך לציר ה- $X$ .
- נסמן ב- $(\alpha, 0)$  וב- $(\beta, 0)$  את נקודות החיתוך של אנכים אלה עם ציר ה- $X$ .

הראו כי בניה זו ניתנת לביצוע אם ורק אם למשוואה  $X^2 - bX + c = 0$  יש פתרונות ממשיים, וכי במקרה זה פתרונותיה הינם  $\alpha, \beta$ .