

## תרגיל 5 בתורת השדות ותורת גלואה

- (1) יהא  $F \subseteq E \subseteq M$  מגדל של הרחבות סופיות.  
(א) הוכיחו כי אם  $M/F$  נורמלית אז גם  $M/E$  נורמלית.  
(ב) הוכיחו כי אם  $M/F$  פרידה אז גם  $E/F$  ו- $M/E$  פרידות.  
(ג) מצאו דוגמא למגדל כנ"ל שבו  $M/F$  נורמלית אך  $E/F$  אינה נורמלית.
- (2) תהא  $E/F$  הרחבת שדות אלגברית עם  $p = \text{Char } F > 0$ . יהא  $\alpha \in E$ . הוכיחו שקיים  $0 \leq i$  כך ש- $\alpha^{p^i}$  פריד מעל  $F$ .
- (3) הוכיחו כי כל הרחבה אלגברית של שדה סופי הינה פרידה (עצה: העזרו בשאלה 6 שבדף תרגילים מס' 1)
- (4) תהא  $E/F$  הרחבה אלגברית. תהא  $S$  קבוצת כל צמודי- $F$  של אברי  $E$ . יהא  $F(S)$  השדה הנוצר ע"י הקבוצה  $S$  מעל  $F$ . הוכיחו:  
\* (א)  $F(S)/F$  הרחבה נורמלית;  
(ב)  $F(S) \supseteq E$   
(ג) לכל הרחבה נורמלית  $N/F$  כך ש- $N \supseteq E$  מתקיים  $N \supseteq F(S)$ . (השדה  $F(S)$  קרוי הסגור הנורמלי של  $E$  מעל  $F$ ).