

תרגיל 6 בתורת השדות ותורת גלואה

(1) חשבו את תבורות גלואה של שדות הפיצול של כל אחד מהפולינומים הבאים:

(א) $X^3 - 10$ מעל \mathbb{Q} ;

(ב) $X^3 - 10$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$;

(ג) $X^6 + 1$ מעל \mathbb{F}_2 ;

(ד) $X^4 + X^2 + 1$ מעל \mathbb{Q} ;

(ה) $X^4 - t$ מעל $\mathbb{C}(t)$;

(ו) $X^4 + 2$ מעל \mathbb{Q}

(הדרכה ל(ו): נסמן $\alpha = \sqrt[4]{2}$ ו- $\zeta = e^{2\pi i/8}$. מהשויון $\zeta\alpha - i\zeta\alpha = 2/\alpha$ נובע כי שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}(\alpha, i)$.)

(2) מצאו את כל שדות הבינים של ההרחבה $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/7})/\mathbb{Q}$.

(3) תהא L/F הרחבת גלואה סופית, תהא E/F הרחבה אלגברית, ויהא $EL (= E(L))$ השדה הנוצר על-ידי E ו- L בתוך הסגור האלגברי של F . הוכיחו:

(א) EL/E הרחבת גלואה;

(ב) $\text{Gal}(EL/E) \cong \text{Gal}(L/L \cap E)$.