

## תרגיל 7 בתורת השדות ותורת גלואה

1. מצאו את חבורות גלואה של כל אחד מהפולינומים הבאים מעל  $\mathbb{Q}$ :

(א)  $X^3 - 1$

(ב)  $X^3 - 3X + 3$

(ג)  $X^3 - 3X + 1$

2. מצאו את שרשי הפולינומים הבאים ב- $\mathbb{C}$ :

(א)  $X^3 + 3X - 10$

(ב)  $X^3 - 9X^2 + 21X - 5$

3. בעזרת נוסחאת Cardano-Tartaglia, פשטו (באופן דרמטי!) את הביטוי-ים הבאים (כאשר כל השרשים הינם ב- $\mathbb{R}$ ):

(א)  $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$

(ב)  $\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$

4. שיטת Viète לפתרון טריגונומטרי של המשוואה  $X^3 + pX + q = 0$ , כאשר  $p, q \in \mathbb{R}$ ,  $p \leq 0$  ו- $\Delta = -4p^3 - 27q^2 \geq 0$ :

(א) ע"י חילוף המשתנים  $X = 2\sqrt{-p/3}Y$ , הראו כי המשוואה הנ"ל שקולה למשוואה  $4Y^3 - 3Y = \cos \alpha$ , ל- $\alpha$  מתאים.

(ב) בעזרת הנוסחא  $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = \cos 3\theta$ , בטאו את שלושת שרשי המשוואה ב- $\mathbb{C}$  כפונקציות של  $\alpha$ .

(ג) פתרו בשיטה זו את המשוואה  $X^3 - 6X - 4 = 0$ .

(ד) השוו את התוצאה שקיבלתם ב(ג) עם הערכים המתקבלים מנוסחאת Cardano-Tartaglia.