BEN-GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן–גוריון בנגב
באר שבע 84105

תורת השדות ותורת גלואה

סמסטר ב', תש"ע ; מס' קורס: 201-17041
מרצה: פרופ' עידו אפרת
דרישות קדם: מבנים אלגבריים (201-17031)

ערב מותו בדו-קרב ב-30 במאי 1832 ניסח Evariste Galois בן ה-21 בחפזה את עיקרי רעיונותיו בדבר סימטריה בין שרשי פולינומים מעל שדות. המסמך הכאותי שהותיר אחריו היה היסוד לאחת התורות היפות במתמטיקה, והקרויה מאז על שמו: תורת גלואה. תורה זו משלבת מושגים יסודיים באלגברה - חבורות ושדות - ושופכת בכך אור חדש על בעיות בסיסיות במגוון תחומים: תורת המספרים, הגאומטריה האויקלידית, משוואות פולינומיאליות, ועוד.

לדוגמא, ידועה לכולנו הנוסחא לפתרון משוואה רבועית. בתקופת הרנסאנס נמצאו נוסחאות בעלות אופי דומה גם למשוואות ממעלות 3 ו-4. אולם מתברר כי לא ניתן למצוא נוסחאות ברוח זו למשוואות ממעלה ≥ 5. כפי שנראה, מאחורי עובדה זו מסתתרת תכונה פשוטה של חבורות, אשר נכונה לחבורת התמורות על n עצמים S_n כש-$n=1,2,3,4$, אך אינה נכונה ל-S_n כש-$n \geq 5$.

בקורס נפתח תחילה את תורת השדות (כהמשכו הישיר של הקורס "מבנים אלגבריים"), ומשם נמשיך לתורתו של גלואה, ולישומיה הרבים והמפתיעים. בין יתר הנושאים שבהם נעסוק:

- בניות בסרגל ומחוגה: שורה של "בעיות בניה" בגאומטריה שהעסיקו את היוונים הקדמונים אך נותרו פתוחות למעלה מ-2000 שנה, ניתנות לתרגום לשפת תורת השדות, ולפתרון בעזרת רעיונותיו של גלואה. לדוגמא, האמירה המוכרת כי "לא ניתן לרבע את המעגל" הינה למעשה משפט שנוכיח, ועל פיו לא ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה ממעגל נתון רבוע בעל שטח זהה. בעיות נוספות עוסקות בבניית מצולעים משוכללים, וקשורות בשאלת קיומם של מספרי Fermat ראשוניים.
- שדות סגורים אלגברית: כזכור, בשדה המרוכבים $\mathbb{C}$ יש לכל פולינום ממעלה ≥ 1 שרש. מי הם השדות בעלי תכונה זו ומה מסתתר מאחוריה?
- מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים
- מבנה השדות הסופיים - לאלו חשיבות רבה בין היתר בקריפטוגרפיה ובתורת הקודים.

<u>מומלץ לקריאת רקע:</u>
מריו ליביו, "שפת הסימטריה - המשוואה שלא נמצא לה פתרון", הוצאת אריה ניר 2006

לפרטים נוספים: עידו אפרת, טל. 6461627, דואל: efrat@math.bgu.ac.il
אתר הקורס: http://www.math.bgu.ac.il/~efrat/Algebra4/