שאלות חזרה בתורת השדות ותורת גלואה

1) מהם הפולינומים האי-פריקים מעל $\mathbb{R}$?

2) הוכיחו כי הפולינומים הבאים אי-פריקים מעל השדות המצויינים:
(א) X^3-3 מעל $\mathbb{Q}$ ומעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
(ב) X^4+1 מעל $\mathbb{Q}$
(ג) X^3-5X^2+2X+1 מעל $\mathbb{Q}$
(ד) X^7-X-1 מעל $\mathbb{F}_7$
(ה) X^3-t מעל $\mathbb{R}(t)$

3) יהא F שדה, יהא $f\in F[X]$ פולינום אי-פריק ומתוקן, ונניח כי גם α וגם $\alpha+1$ שרשים של f. הוכיחו כי ל-F אפיון חיובי.

4) הוכיחו כי מעלת הפולינום האי-פריק של
$$\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})-i\sqrt{5}}{2004+\sqrt{7}+\sqrt[3]{9}}$$
מעל $\mathbb{Q}$ מחלקת את 96.

5) יהא $f(X)=X^3+2X+2$ ויהא α שרש של $f(X)$ ב-$\widetilde{\mathbb{Q}}$. הראו כי $f(X)$ אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$. הציגו את $1/(1+\alpha)$ כקומבינציה לינארית של $1,\alpha,\alpha^2$.

6) הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{3})$.

7) חשבו את הפולינום האי-פריק מעל $\mathbb{Q}$ של המספר הממשי $\alpha=\sqrt{2+\sqrt[3]{2}}$. מצאו את כל שרשיו ב-$\mathbb{C}$.

8) הוכיחו כי הפולינום $X^3-X+1\in\mathbb{Q}[X]$ אי-פריק. לשרש α של פולינום זה, מצאו את $\mathrm{irr}(\alpha^2,\mathbb{Q})$.

9) מצאו את כל הפולינומים האי-פריקים ממעלה 3 מעל $\mathbb{F}_2$.

10) תהא E/F הרחבת שדות סופית ויהא $f\in F[X]$ פולינום אי-פריק ממעלה הזרה ל-$[E:F]$ והגדולה מ-1. הוכיחו כי אין ל-f שרש ב-E.

11) יהא α אבר אלגברי מעל השדה F. נניח כי מעלת $\mathrm{irr}(\alpha,F)$ אי-זוגית. הוכיחו כי $F(\alpha)=F(\alpha^2)$.

12) תנו דוגמא מפורשת לפולינומים $f(X)$ מעל השדה הראשוני המתאים $\mathbb{F}_p$ כך ש-$\mathbb{F}_p[X]/\langle f(X)\rangle$ הינו שדה בן $8, 9$, או 27 אברים.

13) תארו את לוחות החיבור והכפל של $\mathbb{F}_8,\mathbb{F}_9$.

14) תהא E/F הרחבה אלגברית. יהא $f \in E[X]$ פולינום אי-פריק ממעלה $1 \leq$. הוכיחו כי קיים פולינום מתוקן ואי-פריק יחיד $g \in F[X]$ כך ש-$f(X)|g(X)$.

15) הוכיחו כי לכל $p \neq 2$ ראשוני, $(\mathbb{F}_p^\times : (\mathbb{F}_p^\times)^2) = 2$.

16) יהא $f(X) = (X^2-2)(X^2-3)(X^2-6) \in \mathbb{Q}[X]$. הוכיחו כי לכל ראשוני p, לרדוקציה $\bar{f}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ של $f(X)$ מודולו p יש שרש ב-$\mathbb{F}_p$, אולם ל-$f(X)$ אין שרש ב-$\mathbb{Q}$.

17) חשבו את שדות הפיצול של הפולינומים הבאים מעל השדות המצויינים:

(א) $X^3 - 5$ מעל $\mathbb{Q}$
(ב) $X^3 - 2$ מעל $\mathbb{F}_5$.
(ג) $X^6 + X^3 + 1$ מעל $\mathbb{F}_5$
(ד) $X^4 + 4$ מעל $\mathbb{Q}$
(ה) $X^4 - 4$ מעל $\mathbb{Q}$

18) יהא $f \in \mathbb{Q}[X]$ פולינום אי-פריק ממעלה אי-זוגית n עם שרש אחד לפחות ב-$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. הוכיחו כי מעלת שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$ מתחלקת ב-$2n$.

19) תהא E/F הרחבת שדות סופית ממעלה שאינה מתחלקת ב-$\operatorname{char} F$. הוכיחו כי E/F פרידה.

20) שדה קרוי משוכלל (perfect) אם כל הרחבה אלגברית שלו הינה פרידה. לכל אחד מהשדות הבאים, קבעו אם הוא משוכלל (כאן p ראשוני):
(א) $\mathbb{Q}$; (ב) $\mathbb{Q}(t)$; (ג) $\mathbb{F}_p$; (ד) $\mathbb{F}_p(t)$.

21) תהינה E_1, E_2 הרחבות נורמליות של שדה F. הוכיחו כי גם הצרוף E_1E_2 הינו הרחבה נורמלית של F. האם ההיפך נכון?

22) תנו דוגמא למגדל הרחבות סופיות $M/E/F$ כך ש-E שדה פיצול של פולינום מעל F, M שדה פיצול של פולינום מעל E, אך M אינו שדה פיצול של פולינום מעל F.

23) מי מההרחבות הבאות הינה הרחבת גלואה ?

(א) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})/\mathbb{Q}$
(ב) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$
(ג) $\mathbb{R}(t)/\mathbb{R}(t^2)$
(ד) $\mathbb{R}(t)/\mathbb{R}(t^3)$
(ה) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^2)$
(ו) $\mathbb{C}(\sqrt{t})/\mathbb{R}(t)$

(24) יהא $F \subseteq E \subseteq M$ מגדל של שדות ונניח כי M/F גלואה עם $\mathrm{Gal}(M/F)$ קומוטטיבית. הוכיחו כי E/F גלואה. תנו דוגמא המראה כי לא ניתן להסיר את הנחת הקומוטטיביות.

(25) יהא F שדה מאפיון 0 ויהא $f \in F[X]$ אי-פריק עם שדה פיצול E. נניח כי $\mathrm{Gal}(E/F)$ קומוטטיבית. הוכיחו כי $E = F(\alpha)$ לכל שרש α של f.

(26) יהא F שדה מאפיון $\neq 2$ המכיל את $\sqrt{-1}$. תהא E/F הרחבת גלואה מסדר 4. הוכיחו כי אחד התנאים הבאים מתקיים:

(א) $E = F(\sqrt[4]{a})$ ל-$a \in F$ כלשהו; או

(ב) $E = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ל-$a, b \in F$ כלשהם.

(27) תהא E/F הרחבת גלואה עם חבורת גלואה A_5. הוכיחו כי אין הרחבת ביניים $F \subset K \subset E$ עם $[K : F] = 2$.

(28) מצאו את הפולנום האי-פריק של $\alpha = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ מעל $\mathbb{Q}$. הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ הרחבת גלואה ומצאו את חבורת גלואה שלה.

(29) חשבו את חבורות גלואה של הפולינומים הבאים מעל השדות המצויינים. חשבו את שריג הרחבות הביניים (כשהחבורה אינה גדולה מדי):

(א) $X^4 + 6X^2 + X + 1$ מעל $\mathbb{F}_3$

(ב) $X^6 + X^4 + X^2 + 1$ מעל $\mathbb{Q}$

(ג) $X^6 + 1$ מעל $\mathbb{Q}$

(ד) $X^4 - X^2 + 1$ מעל $\mathbb{Q}$

(ה) $\Phi_{24}(X)$ מעל $\mathbb{Q}$

(ו) $X^3 - t$ מעל $\mathbb{C}(t)$

(ז) $X^3 - t$ מעל $\mathbb{R}(t)$

(ח) $X^3 - X + 1$ מעל $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, $\mathbb{F}_3$ ו-$\mathbb{F}_7$

(ט) $X^3 - 3X + 3$ מעל $\mathbb{Q}$

(י) $X^4 - 4X^2 + 1$ מעל $\mathbb{Q}$

(יא) $X^4 - 3$ מעל $\mathbb{Q}$

(יב) $X^4 - 3$ מעל $\mathbb{F}_5$

(יג) $X^4 - 5$ מעל $\mathbb{Q}(i)$

(יד) $X^5 - 5X - 1$ מעל $\mathbb{Q}$

(טו) $\sum_{i=0}^{10} X^i$ מעל $\mathbb{Q}$.

(30) יהא E שדה ותהא G חבורת אוטומורפיזמים של E (ביחס לפעולת ההרכבה). יהא $F = E^G$ ויהא $\alpha \in E$. הוכיחו כי α אלגברי מעל F אם ורק אם הקבוצה $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in G\}$ סופית.

(31) חשבו את $\Phi_{12}(X)$

(32) ל-p ראשוני ול-$\zeta = e^{2\pi i/p}$ הוכיחו כי $\prod_{k=1}^{p-1}(1 - \zeta^k) = p$.

(33) כמה שדות ביניים יש להרחבה $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/42})/\mathbb{Q}$?

(34) מהם שרשי היחידה ב-$\mathbb{C}(t)$, $\mathbb{R}(t)$?

(35) הוכיחו כי $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ ו-$\mathbb{Q}(\cos 2\pi/7)$ הן הרחבות הביניים היחידות של $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/7})/\mathbb{Q}$.

(36) יהא p ראשוני אי-זוגי. הוכיחו כי ישנה הרחבה יחידה $E/\mathbb{Q}$ ממעלה 2 המוכלת ב-$\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$. עבור אילו ראשוניים p מוכל E ב-$\mathbb{R}$?

(37) לבעיות שלהלן נציין את העובדה הבאה: לראשוניים שונים $p_1, \dots, p_s$ ול-טבעיים $r_1, \dots, r_s \geq 1$ מתקיים $\varphi(\prod_{i=1}^s p_i^{r_i}) = \prod_{i=1}^s \Big(p_i^{r_i-1}(p_i - 1)\Big)$.

(38) יהא n טבעי כך ש-$\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ הרחבה ממעלה 2 של $\mathbb{Q}$. מהם ערכיו האפשריים של n?

(39) מהם שרשי היחידה ב-$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$?

(40) עבור אילו מספרים שלמים m אין ב-$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ שרשי יחידה פרט ל-± 1 ?

(41) לטבעי $n \geq 1$ נסמן $(\in \widetilde{\mathbb{Q}})$ $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. הוכיחו כי

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\gcd(n,m)}) \quad , \quad \mathbb{Q}(\zeta_n)\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\mathrm{lcm}(n,m)}) \quad .$$

מתי $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$?

(42) נניח כי $E/\mathbb{Q}$ הרחבה סופית. הוכיחו כי ב-E יש רק מספר סופי של שרשי יחידה.

(43) הוכיחו כי אין הרחבת גלואה E של $\mathbb{Q}$ עם $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4$ ו-$\sqrt{-1} \in E$.

(44) תנו דוגמאות להרחבות גלואה E של $\mathbb{Q}$ כך ש-$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ הינה:
(א) $\mathbb{Z}/2$; (ב) $\mathbb{Z}/22$; (ג) $\mathbb{Z}/11$; (ד) $\mathbb{Z}/3$

(45) מצאו את כל הרחבות הביניים של ההרחבה $\mathbb{F}_{1024}/\mathbb{F}_2$

(46) הוכיחו כי לכל שדה סופי F קיימים ב-$F[X]$ פולינומים אי-פריקים מכל מעלה.

(47) באילו שדות סופיים קיים פתרון למשואה $X^2 + 1 = 0$?

(48) עבור אלו מספרים ראשוניים p הפולינום $X^2 + 2X + 2$ אי-פריק מעל $\mathbb{F}_{p^3}$?

(49) נניח כי $n > 1$ טבעי וכי $2^n - 1$ ראשוני. יהא $f \in \mathbb{F}_2[X]$ פולינום אי-פריק ממעלה n. הוכיחו כי המחלקה של X יוצרת את החבורה הכפלית של השדה $\mathbb{F}_2[X]/\langle f \rangle$.

(50) יהיו f,g פולינומים אי-פריקים מעל שדה סופי $\mathbb{F}_q$ מאותה מעלה. הוכיחו כי $\mathbb{F}_q[X]/\langle f\rangle$ ו- $\mathbb{F}_q[X]/\langle g\rangle$ שדות איזומורפיים.

(51) יהא p ראשוני, יהיו r,s טבעיים, ויהא α יוצר של $\mathbb{F}_{p^r}$ מעל $\mathbb{F}_p$. הוכיחו כי $\operatorname{irr}(\alpha,\mathbb{F}_p)$ נותר אי-פריק ב-$\mathbb{F}_{p^s}$ אם ורק אם r,s זרים.

(52) יהא p ראשוני. הוכיחו כי מעלת שדה הפיצול E של X^n-1 מעל $\mathbb{F}_{p^r}$ הינה הטבעי המזערי k כך ש-$n|q^k-1$.

(53) יהא $f\in\mathbb{Q}[X]$ פולינום אי-פריק ממעל 4 עם שדה פיצול E. יהא $\alpha\in\mathbb{R}$ שרש של f. הוכיחו כי אם $\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}/4$ אז α בני. הוכיחו כי אם $\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})\cong A_4$ אז α אינו בני.

(54) יהא α מספר בני. הוכיחו כי כל צמודי-$\mathbb{Q}$ של α הם בניים.

(55) יהא $f\in\mathbb{Q}[X]$ פולינום אי-פריק ממעלה 4 עם בדיוק שני שורשים ממשיים. הוכיחו כי חבורת גלואה של f מעל $\mathbb{Q}$ <u>אינה</u> איזומורפית תחת הצגת גלואה לחבורה A_4 (= חבורת התמורות הזוגיות ב-S_4).

(56) אילו חבורות סופיות מופיעות כחבורה כפלית של שדה? אילו חבורות סופיות מופיעות כחבורה חיבורית של שדה?

(57) הוכיחו כי ההרחבות $\widetilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p$ אינן סופיות.

(58) תנו דוגמא להרחבה E/F ממעלה 3 כך שאין $\alpha\in E$ המקיים $E=F(\alpha)$ ו-$\alpha^3\in F$.

(59) הוכיחו או הפריכו:

(א) אין ל-$\mathbb{Q}$ שדות חלקיים השונים ממנו.
(ב) כל פולינום אי-פריק ממעלה חיובית מעל $\mathbb{Q}$ מתפרק מעל $\mathbb{C}$ למכפלת גורמים לינארים שונים.
(ג) השדה $\mathbb{C}$ איזומורפי למכפלה הישרה (כחוגים) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
(ד) יהא $f\in\mathbb{Q}[X]$ אי-פריק ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ שרשים שלו. אזי $\alpha\in\mathbb{Q}(\beta)$.
(ה) אם F שדה מאפיון $p>0$ אז קיים פולינום ב-$F[X]$ שאינו פריד.
(ו) אם $F\subseteq E\subseteq M$ מגדל של שדות אז M/F פרידה אם ורק אם E/F, M/E פרידות.
(ז) יש ל-$\mathbb{C}((t))$ הרחבת גלואה ממעלה 2014.
(ח) $\mathbb{Q}(\sin 2\pi/n)/\mathbb{Q}$ גלואה לכל n טבעי.
(ט) אם E שדה המוכל ב-$\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ ל-n טבעי כלשהו אז קיים m טבעי כך ש-$E=\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})$.