פתרון

פתרון לשאלה 1

נתונה המשוואה $A\setminus X=B$ כאשר $P(\mathbb{N}) \ni A,B$ הם פרמטרים ו- $P(\mathbb{N}) \ni X$ הוא הנעלם.

(א) לכל שתי קבוצות A,X מתקיים: $A \supseteq A\setminus X$, ולכן אם קיים פתרון למשוואה $A\setminus X=B$, כלומר אם קיים $P(\mathbb{N}) \ni X$ כך ש- $A\setminus X=B$, אז $A \supseteq B$

ולהיפך: נניח $P(\mathbb{N}) \ni A,B$ ו- $A \supseteq B$ אז $A\setminus(A\setminus B)=B$ (נוכיח בהמשך)
כלומר יש פתרון $X=A\setminus B$.

<u>מסקנה:</u> למשוואה $A\setminus X=B$ יש פתרון (לפחות אחד) אמ"מ $B\subseteq A$.

נוכיח כי $A\setminus(A\setminus B)=B$ כאשר $A\supseteq B$.

<u>כיוון 1:</u> נוכיח $A\setminus(A\setminus B)\supseteq B$.

נניח $B\ni x$ אז מכיוון ש- $A\supseteq B$, $A\ni x$ ולכן $A\setminus B\not\ni x$
מהנתון ש- $A\ni x$ ו- $A\setminus B\not\ni x$, נקבל $A\setminus(A\setminus B)\ni x$.

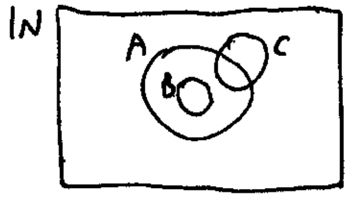
<u>כיוון 2:</u> נוכיח $A\setminus(A\setminus B)\subseteq B$

נניח $A\setminus(A\setminus B)\ni x$ אז $A\ni x$ ו- $A\setminus B\not\ni x$. נניח כי $B\not\ni x$
אז מהנתון ש- $A\ni x$ נקבל $A\setminus B\ni x$ <u>סתירה</u> (כי $A\setminus B\not\ni x$) ולכן $B\ni x$.

אז הוכחנו ש- $A\setminus(A\setminus B)=B$ (כאשר $A\supseteq B$).

(2א) ראינו שלמשוואה $A\setminus X=B$ יש פתרון אמ"מ $A\supseteq B$. ו $X=A\setminus B$ הוא פתרון.

לכל $C\in P(N)$ גם $X=(A\setminus B)\cup C$ הוא פתרון (בתנאי $B\cap C=\emptyset$)



לכן למשוואה יש יותר מפתרון אחד כאשר קיים $C\in P(N)$ כך ש C לא מוכל ב A (ו $C\cap B=\emptyset$), ז"א כדי שיהיה פתרון יחיד צריך שלא יהיה קיים $C\in P(N)$ כך ש $A\not\supseteq C$, ז"א צריך שלכל $C\in P(N)$ יהיה $A\supseteq C$, כלומר $A=N$.

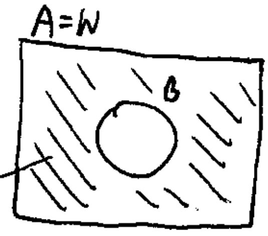
ואכן כאשר $A=N$ יש פתרון יחיד $X=N\setminus B$ כי $N\setminus X=B$ אמ"מ $X=N\setminus B$ (כאשר $N\supseteq X,B$).

ואם $A\neq N$ אז אין פתרון יחיד, כי אז קיים $n_0\in N\setminus A$

ואז $X_1=A\setminus B$ הוא פתרון וגם $X_2=(A\setminus B)\cup\{n_0\}$ הוא פתרון.

<u>מסקנה:</u> למשוואה $A\setminus X=B$ יש פתרון יחיד אמ"מ $A=N$ (ו $N\supseteq B$ קבוצה כלשהי)

והפתרון היחיד הוא $X=N\setminus B$.



X פתרון יחיד, $X=N\setminus B$.

(ד) יהי $A=\{1,2,\dots,n\}$ כלומר A קבוצה בת n איברים.

נחשב את מספר היחסים הרפלקסיביים על A.

$I_A=\{(1,1),(2,2),\dots,(n,n)\}$.

R הוא יחס רפלקסיבי על A אמ"ם $R\supseteq I_A$ וגם $A\times A\supseteq R$.

לכן לכל יחס רפלקסיבי על A, R מתאימה את קבוצה יחידה $(A\times A)\setminus I_A\supseteq S$

$S=R\setminus I_A$.

ולהיפך לכל את קבוצה $(A\times A)\setminus I_A\supseteq S$ מתאים יחס רפלקסיבי על A יחיד R כך: $R=I_A\cup S$.

לכן מספר היחסים הרפלקסיביים על A שווה למספר תתי הקבוצות של $(A\times A)\setminus I_A$.

לקבוצה $(A\times A)\setminus I_A$ יש $|A\times A|-|I_A|=|A|\cdot|A|-|I_A|=n^2-n$ איברים

(כי $A\times A\supseteq I_A$) לכן ישנם 2^{n^2-n} תתי קבוצות של $(A\times A)\setminus I_A$

לכן מספר היחסים הרפלקסיביים על A שווה ל $\boxed{2^{n^2-n}}$.

(ג) $A,B,X \in P(N)$,

ג1) טענה: לכל A,B,X (אם $A\cap X=B\cap X$ אז $A=B$) לא נכונה.

נביא דוגמא נגדית: ניקח A ו-B שונות ו-X כך ש- $X\subseteq A$ ו- $X\subseteq B$

אז $A\cap X=X$ ו- $B\cap X=X$. לדוגמא: $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$

$X=\{1,2\}$.

אז $A\cap X=\{1,2\}$ ו- $B\cap X=\{1,2\}$ לכן $A\cap X=B\cap X$

אבל $A\neq B$.

ג2) טענה: לכל A,B (למשוואה $A\Delta X=B$ בהכרח קיים פתרון) נכונה.

נניח $A\Delta X=B$ אז $A\Delta(A\Delta X)=A\Delta B$

מאסוציאטיביות של Δ נקבל $(A\Delta A)\Delta X=A\Delta B$

ומכיוון ש- $A\Delta A=\emptyset$ נקבל $\emptyset\Delta X=A\Delta B$

ומכיוון ש- $\emptyset\Delta X=X$ נקבל $X=A\Delta B$.

וגם $A\Delta(A\Delta B)=B$ ואם $A,B\in P(N)$ אז $A\Delta B\in P(N)$

לכן יש פתרון (יחיד) $X=A\Delta B\in P(N)$.