

תרגיל 1 . מושגי יסוד של תורת הקבוצות.

1) בדקו איזו מבין הטענות הבאות נכונות:

(א) $\{1,2\} \in \{1,2,3\}$, $\{2\} \in \{2,\{2\}\}$, $2 \in \{2,\{2\}\}$, $1 \in \{\{1\}\}$

(ב) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \in \emptyset$, $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

2) מצאו כל תת-קבוצות של \emptyset , $\{\emptyset\}$, $\{x\}$, $\{1,2\}$

3) הוכיחו או הפריחו את הטענות הבאות:

(א) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ (ב) , $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

(ג) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ (ד) , $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

(ה) $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A$

4) הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $(A \setminus B) \cup B = A$ אם ורק אם $B \subseteq A$,

(ב) $A \cup B = A \cap B$ אם ורק אם $B = A$,

(ג) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ אם ורק אם $C \subseteq A$.

5) הפרש סימטרי בין שתי קבוצות A ו-B מסומן ע"י $A \Delta B$ ומוגדר באופן הבא:

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. הוכיחו את הזהויות הבאות:

(א) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, (ב) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

6) הוכיחו או הפריחו את הטענות הבאות:

(א) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ (ב) , $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ (ג) , $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$.

7) מצאו את המכפלות הקרטזיות הבאות:

(א) $\{0,1,2\} \times \{0,1\}$, (ב) $\emptyset \times N$ (ג) $\{\emptyset\} \times \{\emptyset\}$ (ד) $P(\{1,2\}) \times \{1,2\}$.

8) (א) נסמן קבוצה של כל תת מילים של מילה w באלף בת A ב- $S(w)$.

לדוגמה $S(a^2b) = \{a, a^2, b, ab, a^2b\}$. נתונים $u = a^2ba$, $v = ab^2a$.

(1א) מצאו $S(u) \cup S(v)$, $S(u) \cap S(v)$, $S(u) \Delta S(v)$, $S(u) \setminus S(v)$

(2א) מצאו כל מילים w באלף בת $\{a, b\}$ כך שקבוצה $S(w)$ מכילה בדיוק 5 איברים.

(ב) נסמן קבוצה של כל המחלקים טבעיים של מספר טבעי $n \in \mathbb{N}$ ב- $D(n)$.

בכל סעיף מצאו דוגמאות של מספרים שמקיימים את התנאי מסעיף זה או הוכיחו כי לא קיימים מספרים כאלה.

(1ב) $D(n) \cap D(k) = \emptyset$

(2ב) $D(n) \cup D(k) = \mathbb{N}$

(3ב) $D(n) \subseteq D(k)$. מצאו את כל הזוגות האלו.

(4ב) $D(n) \Delta D(k)$ מכיל איבר יחיד. מצאו את כל הזוגות האלו.

(9) הגדיר פעולות \cup, \cap, \setminus דרך פעולות $\Delta, \cap, \cup, \Delta, \setminus$ (א) Δ, \setminus (ב) \cup, Δ (ג) \setminus, Δ

(10) הוכיחו כי אי אפשר להגדיר פעולה Δ על ידי פעולות \cap, \cup .

(11) נתבונן במשוואה $A \cap X = B$ כאשר $A, B \in P(\mathbb{N})$.

(א) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה אין פתרון.

(ב) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה קיים פתרון. במקרה הזה מצאו את כל הפתרונות.

(ג) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה קיים פתרון יחיד.

(ד) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A, B למשוואה הנתונה יש אין סוף פתרונות.

(12) מצאו $S \circ T, T \circ S, T^2, S^2, T^{-1}, S \setminus T, S \cap T, S \cup T$ כאשר יחסים דו-מקומיים S, T על \mathbb{N} מוגדרים על-ידי

(א) $T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y < 6\}$ ו- $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y > 5\}$

(ב) $T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, xy < 5\}$ ו- $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, xy > 5\}$

(ג) $S = \{(x, y) \mid |x - y| < 2\}$ ו- $T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y < 3\}$