

**תרגיל 3 . אינדוקציה מתמטית. פונקציות. כלל הכפל וכלל החיבור.**

(1) הוכיחו כי לכל  $n \geq 1$  טבעי.

(א)  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ב)  $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

(ג)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(ד)  $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$

(2) עבור סדרת פיבונצ'י המוגדרת על-ידי  $a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

הוכיחו באמצעות האינדוקציה כי

(א)  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$

(ב)  $a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{2n-2} a_{2n-1} + a_{2n-1} a_{2n} = a_{2n}^2$

(ג)  $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} = -a_{2n-1} + 1$

(3) הוכיחו כי לכל  $n$  קבוצות  $A_1, \dots, A_n$  מתקיים

$A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n = \{x \mid A_1, \dots, A_n \text{ של קבוצות}\}$

(4) הוכיחו כי עבור  $n \in \mathbb{N}, n > 7$  כל סכום של  $n$  שם נתן לפרוט במטבעות של 3 שם ו-5 שם .

(5) מצאו דוגמה של פונקציה  $N \rightarrow N$

(א) חד חד ערכית ועל, (ב) חד חד ערכית ולא על, (ג) לא חד חד ערכית ועל

(6) תהי  $f: X \rightarrow X$  פונקציה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) לכל תת קבוצות  $A, B$  של  $X$  מתקיים:  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ב) לכל תת קבוצות  $A, B$  של  $X$  מתקיים:  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(ג) לכל תת קבוצות  $A, B$  של  $X$  מתקיים:  $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

(7) על פונקציה  $f: X \rightarrow X$  ידוע כי  $f^5 = I$  ( $I(x) = x$ ). הוכיחו כי  $f$  חד-חד ערכית ועל.

(8) תהי  $A$  קבוצה עם 2 איברים,  $B$  קבוצה עם 3 איברים. כמה יש

(1א) יחסים דו-מקומיים בין  $A$  ו- $B$

(2א) פונקציות מ  $A$  ל  $B$

(3א) פונקציה חד חד ערכית מ  $A$  ל  $B$

(ב) תהי  $A$  קבוצה עם  $n$  איברים,  $B$  קבוצה עם  $m$  איברים. כמה יש

(1ב) יחסים דו-מקומיים בין  $A$  ו- $B$

(2ב) פונקציות מ  $A$  ל  $B$

(3ב) פונקציה חד חד ערכית מ  $A$  ל  $B$

9) כמה פעולות אלגבריות דו-מקומיות ניתן להגדיר בקבוצה  $\{0,1\}$

א) סך הכל

ב) קומוטטיביות (לכל  $a, b \in \{0,1\}$  מתקיים:  $a \circ b = b \circ a$ )

ג) אידמפוטנטיות (לכל  $a \in \{0,1\}$  מתקיים:  $a \circ a = a$ )

10) כמה מספרים שונים תלת-ספרתיים (בין 100 ל- 999) מקיימים תנאי

א) מתחלקים ב-5.

ב) זוגיים ומכילים רק ספרות 3, 4, 6, 7

ג) כל סיפרה הבאה גדולה מהספרה הקודמת.

ד) כל סיפרה הבאה קטנה מהספרה הקודמת.

11) א) תהי  $A$  קבוצה של כל מספרים חד-ספרתיים,  $B$  קבוצה של כל מילים  
בנות 2 אותיות מורכבות מהאותיות  $a, b, c, d$ . כמה יש

1א) פונקציות מ  $A$  ל  $B$

2א) פונקציה חד חד ערכיות מ  $A$  ל  $B$ .

3א) פונקציות מ  $A$  ל  $B$  שמקימות תנאי  $f(0)=f(5)=ab$

4א) פונקציה חד חד ערכיות מ  $A$  ל  $B$  שמקימות תנאי  $f(0)=ab$  ו-  $f(5)=aa$

ב) תהי  $A$  קבוצה של כל מספרים דו-ספרתיים זוגיים וסיפרה השנייה קטנה  
מספרה הראשונה,  $B$  קבוצה של כל מילים בנות 3 אותיות מורכבות מהאותיות  
 $a, b, c, d$  שלא מחילות את התת מילה  $ab$ . כמה יש

1ב) פונקציות מ  $A$  ל  $B$

2ב) פונקציה חד חד ערכיות מ  $A$  ל  $B$ .

3ב) פונקציות מ  $A$  ל  $B$  שמקימות תנאי  $f(72)=f(54)=aac$

4ב) פונקציה חד חד ערכיות מ  $A$  ל  $B$  שמקימות תנאי  $f(90)=aac$  ו-  
 $f(54)=aaa$

**בהצלחה!**