תרגיל 8. מבוא לשפה ולוגיקה של יחסים.

1) א) תהא L שפה המכילה סימן פונקציה פונקציה חד-מקומית F וסימן של שיוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(N,x+1),\ \ M_2=(Z,x+1),\ \ M_3=(N,x^2),\ \ M_4=(Z,x^2),\ M_5=(Z,x^3)$

ב) תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי R וסימן של שיוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(N,\le),\ \ M_2=(Z,\le),\ \ M_3=(N,|),\ \ M_4=(Q,\le),\ M_5=(Z,|)$
כאשר $a\,|\,b\Leftrightarrow(\exists c)(b=ac)$ ז"א a מחלק את b.

ג) תהא L שפה המכילה סימן פונקציה דו-מקומית F וסימן של שיוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(N,+),\ \ M_2=(N,\times),\ \ M_3=(Q,+),\ \ M_4=(C,\times),\ \ M_5=(P(N),\cup)$

ד) תהא L שפה המכילה סימן יחס דו-מקומי R וסימן של שיוויון.
לכל זוג מהמבנים הבאים מצאו פסוק שנכון באחד מהם ולא נכון בשני.
$M_1=(N,=),\ \ M_2=(N,\equiv_3),\ \ M_3=(N,\equiv_4),\ \ M_4=(Z,\rho),\ M_5=(P(N),\tau)$
כאשר $a\rho b\Leftrightarrow(a\vdots b\wedge b\vdots a)$ ו- $A\tau B\Leftrightarrow|A\triangle B|<\infty$ ז"א $A\triangle B$ קבוצה סופית.

2) א) נתונה שפה $L=(E,=;\sigma)$ ו- $\sigma(E)=\sigma(=)=2$ ($=$ מסמן יחס השוויון).
מצאו פסוק בשפה $L=(E,=;\sigma)$ שמגדיר כי במבנה מתמטי $M=(|M|;E,=)$

א1) E הוא יחס שקילות

א2) E הוא יחס שקילות עם מחלקת שקילות יחידה עם בדיוק 2 איברים וכל מחלקת שקילות אחרת מכילה בדיוק איבר אחד.

ב) נתונה שפה $L=(\le,=;\sigma)$ ו- $\sigma(\le)=\sigma(=)=2$. מצאו פסוק בשפה L שמגדיר כי מבנה מתמטי $M=(|M|;\le,=)$ הוא קבוצה סדורה חלקית עם איבר מינימאלי יחיד בלי איבר מינימום ואם 2 איברים מקסימליים.

ג) נתונה שפה $L=(F,=;\sigma)$ ו- $\sigma(F)=1$. מצאו פסוק בשפה L שמגדיר כי F פונקציה על אבל לא חד-חד ערכית במבנה מתמטי $M=(|M|;F,=)$ ולכל איבר י בדיוק 2 מקורות ז"א לכל $c\in|M|$ קיימים בדיוק 2 איברים $a,b\in|M|$ שפונקציה F מתאימה c.

3) א) יהא $M=(N,F)$ מבנה מתמטי כאשר N קבוצת מספרים הטביעם ו- F פעולה אונרית $F(x)=x+1$. הוכיחו כי

א1) 0 גדיר במבנה $M=(N,F)$.

א2) 1 גדיר במבנה $M=(N,F)$, כל מספר טבעי n גדיר במבנה $M=(N,F)$.

ב) יהא $M=(N,F,G)$ מבנה מתמטי כאשר N קבוצת מספרים הטביעם ו- $F,\ G$ פעולות אונריות $F(x)=2x,\ G(x)=x^2$. הוכיחו כי

ב1) 1 גדיר במבנה $M=(N;\ \ F,\ \ G)$.

ב2) קבוצה של מספרים אי-זוגיים גדירה במבנה $M=(N;\ \ F,\ \ G)$.

ב3) יחס R מוגדר על-ידי $a\ R\ b \Leftrightarrow b=a^6$, גדיר במבנה $M=(N;\ \ F,\ \ G)$.

ג) הוכיחו כי

ג1) $\varnothing$ גדירה במבנה $M=(P(N)\ ,\subseteq)$.

ג2) פעולה $\cup$ גדירה במבנה $M=(P(N)\ ,\subseteq)$.

ג3) קבוצה של כל איברי $P(N)$ המכילות בדיוק איבר אחד גדירה במבנה $M=(P(N)\ ,\subseteq)$.

ד) הוכיחו כי

ד1) 3 גדיר במבנה $M=(N,+)$.

ד2) קבוצה של מספרים אי-זוגיים גדירה במבנה $M=(N,+)$.

ד3) יחס $\leq$ גדיר במבנה $M=(N,+)$.

4) הוכיחו או הפריכו.

א) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(P(x,y)$

ב) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(P(x,y)$

ג) $(\exists x)((P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x))\wedge(\exists x)(Q(x))$

ד) $(\exists x)((P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x))\wedge(\exists x)(Q(x))$

ה) $\neg(\exists x)((P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)\vee\neg Q(x))$

בהצלחה!