פתרון של תרגיל 1 . מושגי יסוד של תורת הקבוצות.

1) בדקו איזו מבין הטענות הבאות נכונות:

א) $1\in\{\{1\}\}$, $2\in\{2,\{2\}\}$, $\{2\}\in\{2,\{2\}\}$, $\{1,2\}\in\{1,2,3\}$

ב) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$, $\varnothing\subseteq\varnothing$, $\varnothing\in\varnothing$, $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

פתרון ב) $\varnothing$ היא תת קבוצה של קבוצה כלשהי לכן $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ וגם $\varnothing\subseteq\varnothing$ טענות נכונות.
קבוצה ריקה לא מכילה אף איבר לכן $\varnothing\in\varnothing$ טענה לא נכונה.
$\varnothing\in\{\varnothing\}$ טענה נכונה לפי הגדרה של הסימון $\{\varnothing\}$.

2) מצאו כל תת-קבוצות של **א)** $\varnothing$, **ב)** $\{\varnothing\}$, **ג)** $\{x\}$, **ד)** $\{1,2\}$

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
ד) $P(\{1,2\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

3) הוכיחו או הפריחו את הטענות הבאות:

א) $A\cup B=A\cup(B\setminus A)$, **ב)** $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$

ג) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$, **ד)** $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

ה) $(A\cup B)\cap A=(A\cap B)\cup A$,

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) טענה $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\setminus C)$ לא נכונה. דוגמה נגדית –
$A=\{1,2\},B=\{1\},C=\{2\}$ אזי נקבל $(A\setminus B)\setminus C=(\{1,2\}\setminus\{1\})\setminus\{2\}=\{2\}\setminus\{2\}=\varnothing$
ו- $A\setminus(B\setminus C)=\{1,2\}\setminus(\{1\}\setminus\{2\})=\{1,2\}\setminus\{1\}=\{2\}\neq\varnothing=(A\setminus B)\setminus C$

ד) טענה $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$ נכונה. ניקח $x\in A\setminus(B\setminus C)$. לפי הגדרה של פעולה הפרש של קבוצות מקבלים כי $x\in A$ ו- $x\notin(B\setminus C)$ לכן $x\notin B$ או $x\in C$ אזי יש 2 מקרים – 1) $x\in A$ ו- $x\notin B$ ז"א $x\in A\setminus B$ או 2) $x\in A$ ו- $x\in C$ ז"א $x\in A\cap C$
לכן מקבלים $x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$ ו- $A\setminus(B\setminus C)\subseteq(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.
ניקח $x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$. לפי הגדרה של פעולה איחוד של קבוצות מקבלים 2 מקרים - 1) $x\in A\setminus B$ לכן $x\in A$ ו- $x\notin B$ ולכן $x\in A\setminus(B\setminus C)$ במקרה 2) $x\in A\cap C$ לכן $x\in A$ ו- $x\in C$ ולכן $x\in A$ ו- $x\notin B\setminus C$ ולכן ז"א לכן $x\in A\setminus(B\setminus C)$. מקבלים שבכל מקרה $x\in A\setminus(B\setminus C)$ ו- $(A\setminus B)\cup(A\cap C)\subseteq A\setminus(B\setminus C)$ לכן $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

4) הוכיחו את הטענות הבאות:

א) $(A\setminus B)\cup B=A$ אם ורק אם $B\subseteq A$,

ב) $A\cup B=A\cap B$ אם ורק אם $B=A$,

ג) $(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$ אם ורק אם $C\subseteq A$.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) כיוון 1 . נתון $A\cup B=A\cap B$ צ"ל $B=A$. ניקח $x\in A$ לכן לפי הגדרה של פעולה איחוד של קבוצות $x\in A\cup B=A\cap B$ לכן לפי הגדרה של פעולה חיתוך של קבוצות $x\in B$. לפי בדיוק אותם נימוקים אם $x\in B$ אז $x\in A$. לכן $B=A$.

כיוון 2. נתון $A=B$ צ"ל $A\cup B=A\cap B$. ניקח $x\in A\cup B$ לכן לפי הגדרה של פעולה איחוד של קבוצות מקבלים 2 מקרים – 1) $x\in A$ ו- $A=B$ אז $x\in A\cap B$. 2) $x\in B$ ו- $A=B$ אז $x\in A\cap B$. מקבלים שבכל מקרה $x\in A\cap B$ ולכן $A\cup B\subseteq A\cap B$.

לפי הגדרות של פעולות איחוד וחיתוך של קבוצות מקבלים כי $A\cap B\subseteq A\cup B$ ולכן $A\cup B=A\cap B$

שיטה 2 עבור כיוון 2. $A\cup B=A\cup A=A=A\cap A=A\cap B$.

5) הפרש סימטרי בין שתי קבוצות A ו- B מסומן ע" $A\Delta B$ ומוגדר באופן הבא:

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. הוכיחו את הזהויות הבאות:

א) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$, **ב)** $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) כיוון 1. ניקח $x\in A\cap(B\Delta C)$ אזי $x\in A$ ו- $x\in B\Delta C$. מקבלים $x\in A$ ו- $x\in(B\setminus C)\cup(C\setminus B)$. לכן לפי הגדרה של פעולה איחוד של קבוצות מקבלים 2 מקרים –

1) $x\in A$ ו- $x\in(B\setminus C)$ אזי $x\in A$ ו- $x\in B$ ו- $x\notin C$ לכן $x\in(A\cap B)$ ו- $x\notin(A\cap C)$ ז"א $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$ ולכן לפי הגדרה של פעולה הפרש סימטרי של קבוצות מקבלים כי $x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

2) $x\in A$ ו- $x\in(C\setminus B)$ אזי $x\in A$ ו- $x\in C$ ו- $x\notin B$ לכן $x\in(A\cap C)$ ו- $x\notin(A\cap B)$ ז"א $x\in(A\cap C)\setminus(A\cap B)$ ולכן לפי הגדרה של פעולה הפרש סימטרי של קבוצות מקבלים כי $x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

בכל מקרה $x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ ו- $A\cap(B\Delta C)\subseteq(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

כיוון 2. ניקח $x\in(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ אזי $x\in((A\cap B)\setminus(A\cap C))\cup((A\cap C)\setminus(A\cap B))$ לכן לפי הגדרה של פעולה איחוד של קבוצות מקבלים 2 מקרים –

1) $x\in A\cap B$ ו- $x\notin(A\cap C)$ אזי $x\in A$ ו- $x\in B$ ו- $x\notin C$ לכן $x\in A$ ו- $x\in B\setminus C$ לכן לפי הגדרה של פעולה חיתוך של קבוצות מקבלים כי $x\in A\cap(B\setminus C)$ ולכן לפי הגדרה של פעולה הפרש סימטרי של קבוצות מקבלים כי $x\in A\cap(B\Delta C)$.

2) $x\in A\cap C$ ו- $x\notin(A\cap B)$ אזי $x\in A$ ו- $x\in C$ ו- $x\notin B$ לכן $x\in A$ ו- $x\in C\setminus B$ לכן לפי הגדרה של פעולה חיתוך של קבוצות מקבלים כי $x\in A\cap(C\setminus B)$ ולכן לפי הגדרה של פעולה הפרש סימטרי של קבוצות מקבלים כי $x\in A\cap(B\Delta C)$.

בכל מקרה $x\in A\cap(B\Delta C)$ ו- $(A\cap B)\Delta(A\cap C)\subseteq A\cap(B\Delta C)$.

לכן $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

6) הוכיחו או הפריחו את הטענות הבאות:

א) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$, **ב)** $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$, **ג)** $P(A\setminus B)=P(A)\setminus P(B)$ **.**

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) טענה $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ לא נכונה. דוגמה נגדית – $A=\{1\},\ A=\{2\},\ A\cup B=\{1,2\}$ אזי מקבלים
$P(A)\cup P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}\neq\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}=P(A\cup B)$

7) מצאו את המכפלות הקרטזיות הבאות:

א) $\{0,1,2\}\times\{0,1\}$, **ב)** $\varnothing\times N$, **ג)** $\{\varnothing\}\times\{\varnothing\}$, **ד)** $P(\{1,2\})\times\{1,2\}$.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) $\{\varnothing\}\times\{\varnothing\}=\{(\varnothing,\varnothing)\}$
ד) $P(1,2)\times\{1,2\}=\{(\varnothing,1),(\varnothing,2),(\{1\},1),(\{1\},2),(\{2\},1),(\{2\},2),(\{1,2\},1),(\{1,2\},2)\}$.

8) א) נסמן קבוצה של כל תת מילים של מילה w באלף בת A ב-$S(w)$.

לדוגמה $S(a^2\mathrm{b})=\{a,a^2,b,ab,a^2b\}$. נתונים $\mathrm{u}=a^2\mathrm{b}a,\mathrm{v}=a\mathrm{b}^2a$.

א1) מצאו $S(u)\cup S(V),\ S(u)\cap S(v),\ S(u)\Delta S(v),\ S(u)\backslash S(v)$

א2) מצאו כל מילים w באלף בת $\{a,b\}$ כך שקבוצה $\mathrm{S(w)}$ מכילה בדיוק 5 איברים.

ב) נסמן קבוצה של כל המחלקים טבעיים של מספר טבעי $n\in N$ ב- $D(n)$.

בכל סעיף מצאו דוגמאות של מספרים שמקיימים את התנאי מסעיף זה או הוכיחו כי לא קיימים מספרים כאלה.
ב1) $D(n)\cap D(k)=\varnothing$
ב2) $D(n)\cup D(k)=N$
ב3) $D(n)\subseteq D(k)$. מצאו את כל הזוגות האלו.
ב4) $D(n)\Delta D(k)$ מכיל איבר יחיד. מצאו את כל הזוגות האלו.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב1) לא מתקיים כי $1\epsilon D(n)\cap D(k)$
ב2) $D(0)=N$ לכן אם $0\in\{n,k\}$ אז $D(n)\cup D(k)=N$ ואם $0\notin\{n,k\}$ אז $D(n)\cup D(k)\neq N$ באמת אם $n\le k$ אז $k+1\notin D(n)\cup D(k)$
ב3) $D(n)\subseteq D(k)$ כאשר n הוא מחלק של k באמת אם $n|k$ אז כל מחלק של n מחלק את k ו- $D(n)\subseteq D(k)$. ואם n לא מחלק את k אז $n\in D(n)\setminus D(k)$.
ב4) אם p הוא מספר ראשוני אז הזוג $n=p^{s+1},\ k=p^{s}$ מקיים את התנאי של סעיף זה. באמת $D(n)\Delta D(k)=\{p^{s+1}\}=\{n\}$. נוכיח שרק זוגות כאלה מקיימות את התנאי הנתון. אם n לא מחלק את k ו-k לא מחלק את n אז $n,k\in D(n)\Delta D(k),n\neq k$ קיבלנו סתירה. לכן בהכרח $n=ap,\ k=a$. נניח $p=st,\ s>1,\ t>1$ לא ראשוני אז $as,at\in D(n)\Delta D(k),\ as\neq at$ קיבלנו סתירה. לכן בהכרח p ראשוני. אם p לא מחלק את a אז $p,ap\in D(n)\Delta D(k),p\neq ap$ קיבלנו סתירה לנתון. לכן p מחלק את a. נניח $a=p^{s}x$ $x\nmid p,\ x\neq 1$ אז $p^{s+1},\ p^{s+1}x\in D(n)\Delta D(k),\ p^{s+1}\neq p^{s+1}x$. קיבלנו סתירה לנתון. לכן זוגות $n=p^{s+1},\ k=p^{s}$ כאשר p הוא מספר ראשוני ורק זוגות כאלה מקיימים את התנאי סעיף זה.

9) הגדיר פעולות $\cup,\cap,\backslash$ דרך פעולות **א)** $\Delta,\cap$ **ב)** $\Delta,\cup$ **ג)** $\Delta,\backslash$

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) $(A \cap B) = A\Delta(A \cup B)\Delta B$ **;** $(A\backslash B) = (A \cup B)\Delta B$
<u>**הערה**</u> אפשר לא לכתוב סוגריים נוספים מפני שפעולה הפרש סימטרי של קבוצות מקיימת חוק קיבוץ (אסוציאטיביות).

10) הוכיחו כי אי אפשר להגדיר פעולה Δ על ידי פעולות $\cap,\cup$**.**

פתרון. נניח $x\Delta y = f(x,y)$ ו- $f(x,y)$ מורכב בעזרת פעולות $\cap,\cup$ אז $f(A,A) = A$ מפני ש- $A \cap A = A,\ A \cup A = A$ אבל $A\Delta A = \varnothing$ לכן $x\Delta y \neq f(x,y)$.

11) נתבונן במשוואה $A \cap X = B$ כאשר $A,B \in P(N)$.

א) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A,B למשוואה הנתונה אין פתרון.

ב) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A,B למשוואה הנתונה קיים פתרון. במקרה הזה מצאו את כל הפתרונות.

ג) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A,B למשוואה הנתונה קיים פתרון יחיד.

ד) עבור אילו ערכים של הפרמטרים A,B למשוואה הנתונה יש אין סוף פתרונות.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב) $B = A \cap X \subseteq A$ לכן פתרון יכול להיות רק עבור $B \subseteq A$.
ניקח $X = B \cup Y$ כאשר Y קבוצה כלשהי שמקיימת תנאי $Y \subseteq N \setminus A$ אזי $A \cap X = B$ ו- X הוא פתרון של המשוואה. נניח C היא קבוצה כלשהי שמקיימת תנאי $A \cap C = B$ אז $B \subseteq C$. נניח $c \in (C \setminus B) \cap A$ אז $c \in C \cap A = B$ קיבלנו סתירה. לכן $(C \setminus B) \subseteq N \setminus A$ לכן $C = B \cup Y$ כאשר $Y \subseteq N \setminus A$. <u>מסקנה</u> $X = B \cup Y$ כאשר $Y \subseteq N \setminus A$ הוא פתרון ואין פתרונות אחרות.
ד) מפתרון של סעיף ב) נובע ש אין סוף פתרונות מקבלים אם ורק אם הקבוצה $N \setminus A$ אין סופית.

12) מצאו $S \circ T, T \circ S, T^2, S^2, T^{-1}, S \setminus T, S \cap T, S \cup T$ כאשר יחסים דו-מקומיים S,T על N מוגדרים על-ידי

א) $S = \{(x,y) \mid x,y \in N, x+y > 5\}$ **ו-** $T = \{(x,y) \mid x,y \in N, x+y < 6\}$

ב) $S = \{(x,y) \mid x,y \in N, xy > 5\}$ ו- $T = \{(x,y) \mid \mathrm{x,y} \in \mathrm{N}, \mathrm{xy} < 5\}$

ג) $T = \{(x,y) \mid x,y \in N, x+y < 3\}$ ו- $S = \{(x,y) \mid |x-y| < 2\}$.

פתרון של סעיפים זוגיים. ב)
$T = \{(0,y),(x,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(4,1)\}$
$S \cup T = N \times N \setminus \{(1,5),(5,1)\}$, $S \cap T = \varnothing$, $S \setminus T = S$, $T^{-1} = T$ כי יש חוק חילוף ל כפל,

$$, T^2 = T \circ T = N \times N \quad , S^2 = S \circ S = N \times N \setminus \{(0, y), (x, 0)\}$$

$$S \circ T = \{(0, y) \mid y > 0\} \cup \{(1, y) \mid y > 1\} \cup \{(2, y) \mid y > 2\} \cup \{(3, y) \mid y > 5\} \cup \{(4, y) \mid y > 5\}$$

$$T \circ S = \{(y, 0) \mid y > 0\} \cup \{(y, 1) \mid y > 1\} \cup \{(y, 2) \mid y > 2\} \cup \{(y, 3) \mid y > 5\} \cup \{(y, 4) \mid y > 5\}$$