

### תרגיל 3 . אינדוקציה מתמטית. פונקציות. כלל הכפל וכלל החיבור.

(1) הוכיחו כי לכל  $n$  טבעי.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{א})$$

נגדיר  $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 1, 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}\} \cup \{0\}$   
צ"ל:  $A = \mathbb{N}$

$0 \in A$  מהגדרת  $A$ , וכן  $1 \in A$  כיוון ש-  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ .

ניח  $n \geq 1$  וכן  $n \in A$ . נראה שגם  $n + 1 \in A$ .

מההנחה ש-  $n \in A$  אנו יודעים ש-  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

נוסיף לשני האגפים את  $n + 1$  ונקבל:  $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$   
נחשב:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

לכן גם  $n + 1 \in A$  כפי שרצינו, ומאקסיומת האינדוקציה הרגילה מקבלים ש-  $A = \mathbb{N}$ .

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (\text{ב})$$

נגדיר  $A = \{n \in \mathbb{N} | a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})\} \cup \{0, 1\}$   
נראה ש-  $A = \mathbb{N}$  בעזרת אינדוקציה רגילה.

$0, 1 \in A$  מהגדרת  $A$ , וכן  $2 \in A$  כיוון ש-  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ .

יהי  $n \geq 2$  כך ש-  $n \in A$ . נראה שבהכרח גם  $(n+1) \in A$ .

כלומר צריך להוכיח:

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

מההנחה ש-  $n \geq 2$  וכן  $n \in A$  אנו יודעים ש-

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

נחשב ונציב את הנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned} & (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= (a-b)(a^n + b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})) \\ &= (a-b) \left( a^n + \frac{b(a^n - b^n)}{a-b} \right) = (a-b)a^n + b(a^n - b^n) \\ &= aa^n - bb^n = a^{n+1} - b^{n+1} \end{aligned}$$

כפי שרצינו להראות.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{ג})$$

נגדיר  $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 1, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2\} \cup \{0\}$   
נראה ש-  $A = \mathbb{N}$  בעזרת אינדוקציה רגילה.

$0 \in A$  מהגדרת  $A$ , וכן  $1 \in A$  כיוון ש-  $1 = 1^2$ .

ניח  $n \geq 1$  ומתקיים  $n \in A$ . צ"ל:  $n + 1 \in A$ .

כלומר צ"ל:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$

נחשב ונציב את הנחת האינדוקציה:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

כפי שרצינו.

2) עבור סדרת פיבונצ'י המוגדרת על-ידי  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $a_0 = a_1 = 1$

הוכיחו באמצעות האינדוקציה כי

$$(א) a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

בסיס עבור  $n = 0$  מתקיים

$$.a_{0+2} - 1 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1 \text{ ולכן } a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2$$

אזי עבור  $n = 0$  מתקיים  $a_0 = a_{0+2} - 1 = 1$

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k = a_{k+2} - 1 . n = k$$

נניח ש- $n \in A$  ונראה שגם  $n + 1 \in A$

הוכחת אינדוקציה  $n = k + 1$ . רוצים להראות שמתקיים:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = a_{k+3} - 1$$

$$,a_0 + a_1 + \dots + a_k = a_{k+2} - 1 \text{ ש-} a_0 + a_1 + \dots + a_k = a_{k+2} - 1$$

נחשב ונציב את הנחת האינדוקציה:

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = a_{k+2} - 1 + a_{k+1} = a_{k+3} - 1$$

כפי שרצינו.

$$(ב) a_0 a_1 + a_1 a_2 + a_2 a_3 \dots + a_{2n-2} a_{2n-1} + a_{2n-1} a_{2n} = a_{2n}^2$$

$$(ג) -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} = -a_{2n-1} + 1$$

3) הוכיחו כי לכל  $n$  קבוצות  $A_1, \dots, A_n$  מתקיים

$$A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n = \{x \mid A_1, \dots, A_n \text{ של קבוצות}\}$$

כלומר, אם למשל  $n = 4$ , אז לכל  $x$  מתקיים ש- $A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta A_4$  אם ורק אם  $x$  שייך לבדיוק קבוצה אחת מהקבוצות או שייך לבדיוק שלוש מהקבוצות.

הערה: הסדרה  $A_1, \dots, A_n$  לא חייבת להיות מורכבת מקבוצות שונות. למשל היא יכולה להיות הסדרה  $A, B, A, C, A, D, B$  (כאן  $n = 7$ ). וכשאנו אומרים ש- $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי של קבוצות בסדרה  $A, B, A, C, A, D, B$  אנו מתכוונים ש- $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי של אינדקסים (בדוגמא 1-7). למשל, אם  $x$  שייך לבדיוק 3 קבוצות, אז יתכן המצב ש- $x$  שייך רק ל- $A$  (אשר מופיעה 3 פעמים בסדרה).

הערה נוספת: אם הסדרה  $A_1, \dots, A_n$  היא בעלת איבר אחד, כלומר  $n = 1$ , אז נסכים ש- $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$  פירושו  $A_1$ .

צריך להוכיח שלכל  $n \geq 1$  קבוצות  $A_1, \dots, A_n$  מתקיים:

$A_1 \Delta \dots \Delta A_n$  אם ורק אם  $x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$  מתוך הקבוצות  $A_1, \dots, A_n$ .  
תהי  $B$  קבוצת כל ה- $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  כך שהטענה נכונה עבורם.

$1 \in \mathbb{N}$  כי  $1 \in A_1$  אם ורק אם  $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות:  $A_1$ .  
יהי  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  ונניח כי  $n \in B$ . נראה שגם  $n + 1 \in B$ .

יהיו  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  קבוצות. אזי:

$$A_1 \Delta \dots \Delta A_n \Delta A_{n+1}$$

$$= \{x \mid x \text{ is in exactly one of the two sets: } A_1 \Delta \dots \Delta A_n \text{ and } A_{n+1}\}$$

לכן אם נוכיח שהטענות הבאות שקולות, סיימנו:

1.  $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$

2.  $x$  שייך לבדיוק אחת משתי הקבוצות  $A_1 \Delta \dots \Delta A_n, A_{n+1}$

נוכיח כי 1 גורר את 2:

נניח ש- $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ .  
אם  $x \in A_{n+1}$ , אז  $x$  שייך לבדיוק מספר זוגי מתוך הקבוצות  $A_1, \dots, A_n$ , ולכן  
 $x \notin A_1 \Delta \dots \Delta A_n$ . אז הוכחנו את 2.  
אם  $x \notin A_{n+1}$ , אז  $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות  $A_1, \dots, A_n$ , ולכן  
 $x \in A_1 \Delta \dots \Delta A_n$ . שוב הוכחנו את 2.

נוכיח כי 2 גורר את 1:

נניח ש- $x$  שייך לבדיוק אחת משתי הקבוצות  $A_1 \Delta \dots \Delta A_n, A_{n+1}$ .  
אם  $x \in A_{n+1}$ , אז  $x \notin A_1 \Delta \dots \Delta A_n$ , ולכן  $x$  שייך לבדיוק מספר זוגי מתוך הקבוצות  
 $A_1, \dots, A_n$ . כלומר  $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ , ולכן הוכחנו  
את 1.  
אם  $x \notin A_{n+1}$ , אז  $x \in A_1 \Delta \dots \Delta A_n$ , ולכן  $x$  שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות  
 $A_1, \dots, A_n$ . כיוון ש- $x \notin A_{n+1}$ , הרי ש- $x$  עדיין שייך לבדיוק מספר איזוגי מתוך הקבוצות  
 $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ . שוב הוכחנו את 1.

לכן  $n + 1 \in B$  ומקבלים ש- $B = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

#### 4 מצאו דוגמה של פונקציה $N \rightarrow N$ (א) חד חד ערכית ועל

פונקצית הזהות  $Id_{\mathbb{N}}$  היא חח"ע ועל.

#### (ב) חד חד ערכית ולא על

לכל  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר  $f(n) = n + 1$ .  
אזי  $f$  חח"ע, אבל אינה על, כי ל- $0 \in \mathbb{N}$  אין מקור תחת  $f$ .

#### (ג) לא חד חד ערכית ועל

לכל  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ is even} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ is odd} \end{cases}$$

אזי  $f$  היא על, אבל אינה חח"ע כי מתקיים למשל  $f(2) = f(3) = 1$ .

#### 5) תהי $f: X \rightarrow X$ פונקציה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) לכל תת קבוצות  $A, B$  של  $X$  מתקיים:  $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

הטענה נכונה. נוכיח ע"י הכלה דו-כיוונית:

כיוון ראשון:

נראה ש-  $f[A \cup B] \subseteq f[A] \cup f[B]$

יהי  $y \in f[A \cup B]$ . נראה ש-  $y \in f[A] \cup f[B]$ .

$y \in f[A \cup B]$  ולכן קיים  $x \in A \cup B$  כך ש-  $f(x) = y$ .

אם  $x \in A$  אז  $f(x) \in f[A]$  ולכן גם  $y \in f[A] \cup f[B]$ .

אם  $x \in B$  אז  $f(x) \in f[B]$  ולכן גם  $y \in f[A] \cup f[B]$ .

כלומר בכל מקרה מתקיים ש-  $y \in f[A] \cup f[B]$  כפי שרצינו.

### כיוון שני:

נראה ש-  $f[A \cup B] \supseteq f[A] \cup f[B]$   
 יהי  $y \in f[A \cup B]$  נראה ש-  $y \in f[A] \cup f[B]$ .  
 אם  $y \in f[A]$  אז קיים  $x \in A$  כך ש-  $f(x) = y$ .  
 כיוון ש-  $x \in A \cup B$  ולכן  $y = f(x) \in f[A \cup B]$ .  
 אם  $y \in f[B]$  אז קיים  $x \in B$  כך ש-  $f(x) = y$ .  
 כיוון ש-  $x \in A \cup B$  ולכן  $y = f(x) \in f[A \cup B]$ .  
 כלומר בכל מקרה מתקיים ש-  $y \in f[A \cup B]$  כפי שרצינו. ■

### ב) לכל תת קבוצות $A, B$ של $X$ מתקיים: $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$

הטענה אינה נכונה. נפרוץ ע"י דוגמה נגדית:  
 נגדיר:  $f: \{1,2\} \rightarrow \{1\}$  ע"י:  $f(1) = 1, f(2) = 1$ , ונקח  $A = \{1\}$  ו-  $B = \{2\}$ .  
 אז  $A \cap B = \emptyset$ , ולכן  $f[A \cap B] = \emptyset$ .  
 אבל  $f[A] = f[B] = \{1\}$  ולכן  $f[A] \cap f[B] = \{1\} \neq \emptyset$ .

### ג) לכל תת קבוצות $A, B$ של $X$ מתקיים: $f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B]$

הטענה אינה נכונה. נפרוץ ע"י דוגמה נגדית:  
 נגדיר:  $f: \{1,2\} \rightarrow \{1\}$  ע"י:  $f(1) = 1, f(2) = 1$ , ונקח  $A = \{1\}$  ו-  $B = \{2\}$ .  
 $f[A] \setminus f[B] = \emptyset$  ולכן  $f[A \setminus B] = \emptyset$ .  
 אבל  $A \setminus B = \{1\} \neq \emptyset$  ולכן  $f[A \setminus B] = \{1\}$ .

## 6) על פונקציה $f: X \rightarrow X$ ידוע כי $f^5 = I$ (כאן $I(x) = x$ ). הוכיחו כי $f$ חד-חד ערכית ועל.

### נוכיח כי $f$ חח"ע:

יהיו  $x, y \in X$  כך ש-  $f(x) = f(y)$ . נראה ש-  $x = y$ .  
 נפעיל את  $f^4$  על שני האגפים של השוויון  $f(x) = f(y)$  ונקבל:  
 $f^4(f(x)) = f^4(f(y)) \Leftrightarrow f^5(x) = f^5(y) \Leftrightarrow I(x) = I(y) \Leftrightarrow x = y$   
 לכן  $f$  חח"ע.

### נוכיח כי $f$ על:

יהי  $y \in X$ . צ"ל: קיים  $x \in X$  כך ש-  $f(x) = y$ .  
 מתקיים  $f^5(y) = I(y) = y$ . אבל  $f^5(y) = f(f^4(y))$ , ולכן  $y = f(f^4(y))$ .  
 נסמן  $x = f^4(y)$ . אזי  $x \in X$  (כי  $f: X \rightarrow X$ ) וכן  $f(x) = y$ , כפי שרצינו.

### דרך נוספת:

מתקיים:  $f^5 = f^4 \circ f = f \circ f^4 = I$   
 לכן קיימת  $f^{-1} = f^4$  ו-  $f$  הפיכה. מכאן ש-  $f$  היא חח"ע ועל.

## 7) א) תהי $A$ קבוצה עם 2 איברים, $B$ קבוצה עם 3 איברים. כמה יש 1) יחסים דו-מקומיים בין $A$ ו- $B$

R יחס דו-מקומי בין  $A$  ו-  $B$  אם ורק אם  $R$  תת-קבוצה של  $A \times B$ .  
 בקבוצה  $A \times B$  ישנם  $2 \times 3 = 6$  איברים (שהם זוגות סדורים).  
 לכן מספר האפשרויות ליצירת תת-קבוצה של  $A \times B$  הוא  $2^6 = 64$ .  
 מכאן שישנם 64 יחסים דו-מקומיים בין  $A$  ו-  $B$ .

## 2א) פונקציות מ A ל B

צריך להחליט לאן לשלוח את האיבר הראשון של A ולאן לשלוח את האיבר השני של A. עבור כל אחד מהם ישנן 3 אופציות, כמספר האיברים ב-B. לכן בסה"כ ישנן  $3 \times 3 = 9$  פונקציות בין A ל-B.

## 3א) פונקציה חד חד ערכיות מ A ל B

הפעם צריך להחליט לאן לשלוח את האיבר הראשון של A, ואז להחליט לאן לשלוח את האיבר השני של A, כשאסור לחזור על הבחירה הקודמת. לכן עבור האיבר הראשון ישנן 3 אופציות, ועבור האיבר השני ישנן 2 אופציות בלבד. סה"כ ישנן  $3 \times 2 = 6$  פונקציות חח"ע מ-A אל B.

## ב) תהי A קבוצה עם n איברים, B קבוצה עם m איברים. כמה יש 1ב) יחסים דו-מקומיים בין A ו-B

בדומה לפתרון מסעיף א', בקבוצה  $A \times B$  ישנם  $nm$  איברים, ולכן בסה"כ ישנם  $2^{mn}$  יחסים דו-מקומיים בין A ו-B.

## 2ב) פונקציות מ A ל B

עבור כל איבר ב-A ישנן m אופציות ב-B, ולכן בסה"כ ישנן  $m^n$  פונקציות מ-A ל-B.

## 3ב) פונקציה חד חד ערכיות מ A ל B

עבור האיבר הראשון של A ישנן m אופציות, עבור האיבר השני של A ישנן  $m - 1$  אופציות, וכן הלאה עד שמגיעים לאיבר האחרון של A, שעבורו ישנן  $m - n + 1$ .

לכן בסה"כ ישנן  $m(m - 1) \cdot \dots \cdot (m - n + 1) = \frac{m!}{(m-n)!}$  פונקציות חח"ע מ-A ל-B.

כמובן שאם  $m < n$  אזי מספר הפונקציות החח"ע מ-A ל-B הוא 0.

## 8) כמה פעולות אלגבריות דו-מקומיות ניתן להגדיר בקבוצה $\{0,1\}$

פעולה דו-מקומית על  $\{0,1\}$  היא פונקציה  $f: \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ .

### א) סך הכל

בקבוצה  $\{0,1\} \times \{0,1\}$  ישנם 4 איברים, ואת כל אחד מהם צריך לשלוח לאחת מבין הספרות 0,1. כלומר לכל אחד מהם ישנן שתי אופציות, ולכן בסה"כ ישנן  $2^4 = 16$  פונקציות כנ"ל.

### ב) קומוטטיביות (לכל $a, b \in \{0,1\}$ מתקיים: $a \circ b = b \circ a$ )

נרשום את איברי הקבוצה  $\{0,1\} \times \{0,1\}$ :  
 $\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

אם הפעולה קומוטטיבית, אז צריך להתקיים ש-  $f((0,1)) = f((1,0))$  ולכן הפעם יש רק שלושה איברים שצריך לשלוח לאחת מבין הספרות 0,1. לכן בסה"כ ישנן  $2^3 = 8$  פונקציות קומוטטיביות כנ"ל.

**(ג) אידמפוטנטיות (לכל  $a \in \{0,1\}$  מתקיים:  $a \circ a = a$ )**

כעת אנחנו יודעים ש-  $f((0,0)) = 0$  וכן  $f((1,1)) = 1$ . כלומר הפעם נותרו רק שני איברים בקבוצה  $\{0,1\} \times \{0,1\}$  שצריך לשלוח לאחת מבין הספרות 0,1. לכן ישנן  $2^2 = 4$  פונקציות אידמפוטנטיות כנ"ל.

**(9) כמה מספרים שונים תלת-ספרתיים (בין 100 ל- 999) מקיימים תנאי (א) מתחלקים ב-5.**

נסמן את המספר התלת ספרתי ע"י:  $abc$ . אזי  $a \in \{1,2, \dots, 9\}$  כי המספר לא יכול להתחיל ב-0, וכן  $c \in \{0,5\}$  כדי שהמספר יתחלק ב-5. עבור  $b$  מתקיים  $b \in \{0,1, \dots, 9\}$  כי עליו אין אילוצים. כלומר ישנן 9 אופציות עבור  $a$ , 10 אופציות עבור  $b$  ו-2 אופציות עבור  $c$ . לפי עיקרון הכפל, מספר האפשרויות לבנות מספר כנ"ל הוא:  $9 \times 10 \times 2 = 180$ .

**(ב) זוגיים ומכילים רק ספרות 3, 4, 6, 7**

נסמן את המספר התלת ספרתי ע"י:  $abc$ . אזי  $a, b \in \{3,4,6,7\}$  וכן  $c \in \{4,6\}$  כדי שהמספר יהיה זוגי. כלומר ישנן 4 אופציות עבור  $a$ , 4 אופציות עבור  $b$  ו-2 אופציות עבור  $c$ . לפי עיקרון הכפל, מספר האפשרויות לבנות מספר כנ"ל הוא:  $4 \times 4 \times 2 = 32$ .

**(ג) כל סיפרה הבאה גדולה מהספרה הקודמת.**

כל מספר תלת ספרתי כנ"ל חייב להכיל שלוש שונות ספרות מבין 1, ..., 9, מסודרות בסדר עולה. כלומר ברגע שנקבעו שלוש הספרות, יש דרך אחת ויחידה לסדר אותן כך שכל ספרה תהיה גדולה יותר מהקודמת. לכן, מספר האפשרויות ליצירת מספר תלת ספרתי כנ"ל, שווה בעצם למספר תתי-הקבוצות בגודל 3 של קבוצת המספרים  $\{1, \dots, 9\}$ . מספר תתי-הקבוצות בגודל 3 של קבוצה בת 9 איברים הוא:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$$

**(ד) כל סיפרה הבאה קטנה מהספרה הקודמת.**

הפעם לספרה האחרונה מותר להיות 0, ולכן כל צירוף של שלוש ספרות שונות מבין 0,1, ..., 9 יגדיר מספר יחיד. לכן, מספר האפשרויות ליצירת מספר תלת ספרתי כנ"ל, שווה בעצם למספר תתי-הקבוצות בגודל 3 של קבוצת המספרים  $\{0, \dots, 9\}$ . מספר תתי-הקבוצות בגודל 3 של קבוצה בת 10 איברים הוא:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$$

10 א) תהי  $A$  קבוצה של כל מספרים חד-ספרתיים,  $B$  קבוצה של כל מילים  
בנות 2 אותיות מורכבות מהאותיות  $a, b, c, d$ . כמה יש

א1) פונקציות מ  $A$  ל  $B$

ראשית נשים לב ש-  $|A| = |\{0, 1, \dots, 9\}| = 10$  וכן  $|B| = 4 \cdot 4 = 16$ .  
מספר הפונקציות מ- $A$  ל- $B$  שווה ל-  $|B|^{|A|} = 16^{10}$

א2) פונקציה חד חד ערכיות מ  $A$  ל  $B$ .

מספר הפונקציות החח"ע מ- $A$  ל- $B$  שווה ל:  
$$16 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (16 - 10 + 1) = \frac{16!}{(16 - 10)!} = \frac{16!}{6!} = \frac{|B|!}{(|B| - |A|)!}$$

א3) פונקציות מ  $A$  ל  $B$  שמקימות תנאי  $f(0)=f(5)=ab$

עבור כל אחת מהספרות 0 ו-5 יש אופציה אחת בלבד, והיא  $ab$ .  
עבור כל אחת משמונה הספרות הנותרות ישנן 16 אפשרויות (כמספר האיברים בקבוצה  $B$ ).  
לכן בסה"כ מספר האפשרויות הוא:  $16^8$ , לפי עקרון הכפל.

א4) פונקציה חד חד ערכיות מ  $A$  ל  $B$  שמקימות תנאי  $f(5)=aa$  ו-  $f(0)=ab$

עבור הספרה 0 ישנה אפשרויות אחת בלבד, והיא  $ab$ .  
עבור הספרה 1 ישנן 14 אפשרויות (הכל פרט ל- $aa$  ו- $ab$ ).  
עבור הספרה 2 ישנן 13 אפשרויות.  
עבור הספרה 3 ישנן 12 אפשרויות.  
עבור הספרה 4 ישנן 11 אפשרויות.  
עבור הספרה 5 ישנה אפשרות אחת בלבד, והיא  $aa$ .  
עבור הספרה 6 ישנן 10 אפשרויות.  
עבור הספרה 7 ישנן 9 אפשרויות.  
עבור הספרה 8 ישנן 8 אפשרויות.  
עבור הספרה 9 ישנן 7 אפשרויות.  
לכן בסה"כ מספר האפשרויות הוא:  $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 1 = \frac{14!}{6!}$  לפי עקרון הכפל.

ב) תהי  $A$  קבוצה של כל מספרים דו-ספרתיים זוגיים וסיפרה השנייה קטנה  
מספרה הראשונה,  $B$  קבוצה של כל מילים בנות 3 אותיות מורכבות  
מהאותיות  $a, b, c, d$  שלא מכילות את התת מילה  $ab$ . כמה יש

ראשית נחשב את  $|A|$ :

מספר דו-ספרתי  $ab$  שייך ל- $A$  אם  $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$  וגם  $b < a$ .  
עבור  $b = 0$  ישנן 9 אפשרויות עבור  $a$ , כי  $a \in \{1, \dots, 9\}$ .  
עבור  $b = 2$  ישנן 7 אפשרויות עבור  $a$ , כי  $a \in \{3, \dots, 9\}$ .  
עבור  $b = 4$  ישנן 5 אפשרויות עבור  $a$ , כי  $a \in \{5, \dots, 9\}$ .  
עבור  $b = 6$  ישנן 3 אפשרויות עבור  $a$ , כי  $a \in \{7, 8, 9\}$ .  
עבור  $b = 8$  ישנה אפשרות אחת בלבד עבור  $a$ , כי  $a = 9$ .  
לכן בסה"כ נקבל ש-  $|A| = 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ .

כעת נחשב את  $|B|$ :  
 סה"כ ישנן  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$  מילים באורך 3 מעל  $\{a, b, c, d\}$ .  
 מילה באורך 3 מעל  $\{a, b, c, d\}$  ש- $ab$  היא תת-מילה שלה נראית כך:  $abx$  או כך:  $xab$ ,  
 כאשר  $x \in \{a, b, c, d\}$ .  
 בכל אחת מהצורות ישנן 4 אפשרויות עבור  $x$ , ולכן בסה"כ ישנן  $4 + 4 = 8$  מילים כנ"ל.  
 אנחנו מעוניינים בכל המילים באורך 3 מעל  $\{a, b, c, d\}$  שלא מכילות את  $ab$  כתת-מילה, ולכן  
 $|B| = 64 - 8 = 56$ .

### ב1) פונקציות מ $A$ ל $B$

מספר הפונקציות מ- $A$  ל- $B$  שווה ל- $56^{25} = |B|^{|A|}$ .

### ב2) פונקציה חד חד ערכיות מ $A$ ל $B$

מספר הפונקציות החח"ע מ- $A$  ל- $B$  שווה ל- $\frac{56!}{31!} = \frac{56!}{(56-25)!} = \frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$ .

### ב3) פונקציות מ $A$ ל $B$ שמקימות תנאי $f(72)=f(54)=aac$

עבור כל אחד מהמספרים  $54, 72 \in A$  ישנה רק אופציה אחת.  
 עבור כל אחד משאר 23 המספרים ב- $A$ , ישנן  $|B| = 56$  אופציות.  
 לכן בסה"כ ישנן  $56^{23}$  פונקציות כנ"ל.

### ב4) פונקציה חד חד ערכיות מ $A$ ל $B$ שמקימות תנאי $f(90)=aac$ ו-

$$f(54)=aaa$$

בדומה לסעיף 4, מספר הפונקציות שמקימות את התנאים הוא  $\frac{54!}{31!}$ .